

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

ANA CRISTINA AZEVEDO MACHADO OLIVEIRA

TESE DE DOUTORAMENTO APRESENTADA
À FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO EM
ENSINO E DIVULGAÇÃO DAS CIÊNCIAS

ANA CRISTINA AZEVEDO MACHADO OLIVEIRA

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL

TESE DE DOUTORAMENTO APRESENTADA
À FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO EM
ENSINO E DIVULGAÇÃO DAS CIÊNCIAS

12 DE JULHO DE 2013

AGRADECIMENTOS

Às Professoras Maria Carvalho e Maria Dedò, pelo apoio e pela disponibilidade que sempre demonstraram, pelo muito que me ensinaram, pelas ideias e sugestões dadas e pelo vasto trabalho de revisão.

À Professora Maria Carvalho e ao Centro de Matemática da Universidade do Porto, pelo apoio logístico, nomeadamente proporcionando-me condições para deslocações ao estrangeiro no âmbito da tese.

À Associação Atrator – Matemática Interactiva, pela disponibilidade em ceder imagens do seu espólio.

Ao Professor Manuel Arala Chaves, pelas conversas sobre questões matemáticas (e *mathematics*) ligadas à dissertação.

RESUMO

Esta tese contém material original para a divulgação e a aprendizagem informal da Matemática, apresentado em três formatos:

- um livro ilustrado, inspirado no espólio da exposição *Matemática Viva*, uma mostra que esteve patente durante dez anos no Pavilhão do Conhecimento e é da autoria da Associação Atractor – Matemática Interactiva;
- a publicação, em revistas de divulgação, de quatro artigos sobre alguns dos temas analisados no ponto anterior;
- a construção de um módulo interactivo e virtual, acompanhado de um compêndio técnico com informação matemática, sobre um tipo específico de mecanismos (quadriláteros e pentágonos articulados) e respectivos espaços de configuração (curvas e superfícies).

SUMMARY

This thesis contains original material for the promotion and the informal learning of Mathematics, presented in three formats:

- an illustrated book, inspired by the contents of the exhibition *Matemática Viva* (Mathematics Alive) which has been on display for ten years at Pavilhão do Conhecimento (Pavillion of Knowledge) and is authored by Associação Atractor – Matemática Interactiva;
- the publication, in journals devoted to the popularization of Mathematics, of four articles on topics addressed in the previous item;
- the construction of an interactive virtual module, accompanied by a technical textbook with mathematical information, on a particular type of mechanisms (quadrilateral and pentagonal linkages) and their corresponding configuration spaces (curves and surfaces).

RÉSUMÉ

Cette thèse contient du matériel originel approprié à la divulgation et à l'apprentissage informel de la Mathématique, présenté en trois formats:

- un livre illustré, inspiré dans les contenus de l'exposition *Matemática Viva* (Mathématiques Vivantes), qui est restée ouverte au public pendant dix ans au Pavilhão do Conhecimento (Pavillon de la Connaissance) et a été conçue et créée par l'Associação Atractor - Matemática Interactiva;
- la publication, dans des revues de divulgation, de quatre articles sur des thèmes analysés dans le contexte mentionné au point précédent;
- la construction d'un module interactif et virtuel, accompagné par un texte technique contenant des informations mathématiques, sur un type spécifique de mécanismes (quadrilatères et pentagones articulés) et les espaces de configuration correspondants (courbes et surfaces).

INTRODUÇÃO

Esta é uma tese em Divulgação da Matemática. Com as diversas contribuições e perspectivas neste âmbito que têm surgido no país, o investimento das editoras em obras deste teor, as múltiplas análises estatísticas ou sociológicas de impacto e a diversidade de estratégias por que os divulgadores podem optar, a catalogação de uma tese em Divulgação admite, hoje em dia, várias acepções. Cabe, portanto, aqui um esclarecimento prévio. O plano proposto para esta dissertação foi o de elaborar material original para a divulgação da Matemática em três formatos distintos:

- a redacção de um livro ilustrado para um público apenas familiarizado com Matemática básica;
- a publicação em revistas de divulgação, cujos leitores são maioritariamente professores ou alunos universitários de Matemática, de artigos curtos sobre temas criteriosamente escolhidos;
- a construção de um módulo interactivo, sobre um tema avançado mas apresentado num estilo elementar e através de dois percursos de dificuldade distinta, acompanhado de um compêndio técnico com informação matemática adicional.

Espero ter produzido conteúdo de divulgação que perdure e venha de facto a ser utilizado para que o seu impacto na comunicação informal da Matemática possa ser mais tarde avaliado.

O trabalho de popularização das ciências exige uma escolha ponderada de conteúdo, de registo e de abordagem. Logo, a uma obra académica nesta área,

pede-se uma eficiência exemplar na comunicação. Por isso, nas duas componentes desta dissertação,

- a *escrita*, inspirada no espólio da exposição *Matemática Viva*,
- a *interactiva*, em que se construiu um módulo original,

houve que previamente clarificar os objectivos e o público-alvo, que perseverar no esforço de usar uma linguagem acessível mas rigorosa (isto é, correcta mas sem excessivo pendor técnico), e que assegurar um discurso cuidado, elucidativo e convincente, que estimulasse a curiosidade e promovesse a Matemática de modo inovador e atraente.

A Matemática, tida por uma vasta maioria da população como compreensível apenas por alguns poucos talentosos, quase sem uma presença regular na imprensa nem a tradição de manter o público informado sobre as suas descobertas e aplicações, coloca dificuldades acrescidas ao divulgador. Nomeadamente:

1. *Que critérios usar na selecção de temas?*

Decidir sempre pelo que é mais simples e de leitura imediata não convém a um público que também aprecia desafios e quer ter uma participação activa na sua aprendizagem. A promoção da Matemática, recorrendo a diferentes canais (publicações, exposições, jogos, programas de computador, filmes, etc), conta actualmente com inúmeros adeptos e valiosos contributos que são fonte inestimável de inspiração. Contudo, a motivação mais relevante para esta tese surgiu na exposição *Matemática Viva*, a maior exposição com espólio matemático alguma vez realizada em Portugal. Inaugurada em 2000, para assinalar o Ano Mundial da Matemática, esteve patente até Agosto de 2010 em Lisboa e é da autoria da Associação Atrator¹. Recebeu um número elevado de visitantes - segundo os dados do Pavilhão do Conhecimento, mais de dois milhões - e tem sido elogiada e citada, tanto a nível nacional como internacional² ([C]). Tendo tido o privilégio de trabalhar, em regime de destacamento, na Associação Atrator desde o seu início, estive directamente envolvida na concepção e

¹ <http://www.atractor.pt>

² [C] Crato, N., *A Matemática das Coisas*, Gradiva, 2008.

realização desta mostra, que se manteve aberta ao público durante dez anos e cujos módulos, recentemente devolvidos à Associação Atractor, acusam um desgaste considerável. Por isso, considereei ser este o momento indicado para o registo em livro (que não um mero catálogo) do conteúdo de alguns dos módulos da exposição, que legue a gerações vindouras um testemunho da sua inegável qualidade. Na impossibilidade de analisar aprofundadamente todos os módulos, dado o seu elevado número (cerca de setenta), escolhi os que têm uma ligação inequívoca ao currículo académico em vários níveis de ensino das ciências no país e os que parecem criar naturalmente empatia no público, não deixando de diversificar o leque de assuntos e, sempre que desejável, de enfatizar as aplicações à vida real.

2. *A que público serve este trabalho?*

Certamente deseja-se que seja apreciado pelos especialistas, mas é sobretudo ao público geral, apenas com uma formação básica em Matemática, que se dirige. Porém, sendo este um público anónimo, foi preciso adequar o discurso científico nas várias instâncias da tese aos conhecimentos de uma plateia ideal.

Foram estas as minhas opções:

(a) O livro *Matemática Experimental: alguns exemplos* foi pensado para um leitor com alguma familiaridade com a Matemática, pelo menos a que é tida como adquirida no fim do terceiro ciclo do ensino obrigatório.

(b) Os artigos *Matemática nel calcio*, *Con un giro di ruota* e *O que é uma cónica?* dirigem-se a um público mais vasto, amador embora atento à divulgação das ciências.

(c) O artigo *Estradas para rodas exóticas* é mais especializado mas pode ser entendido por um aluno universitário de Matemática.

(d) O módulo interactivo *Movimento e Forma* destina-se a utilizadores genuinamente interessados numa das características

essenciais da Matemática que é uma das chaves para o seu sucesso: a habilidade em utilizar conceitos e métodos simples e intuitivos (como o movimento de um sistema articulado) para entender noções abstractas (como a de curva ou de superfície) e as generalizar. Oferece dois percursos, o facultativo mais exigente quanto à formação matemática prévia do utilizador, o principal acessível a todos.

(e) O compêndio que complementa o módulo virtual é um texto matemático sobre o transporte de conceitos geométricos do plano e do espaço, familiares a quase todos, para conjuntos em que os pontos e as distâncias representam outra coisa mais geral e admitem outras interpretações (como explica sabiamente o autor de [F]³). Os argumentos utilizados no texto são elementares mas só beneficiam quem já treinou utilizar o que aprendeu para descobrir matemática nova.

3. *Qual a abordagem mais eficiente?*

Se num módulo interactivo é possível guiar a aprendizagem e assegurar certas metas, e um livro competente pode ser um veículo muito eficaz para transmitir informação científica elementar, a verdade é que o bom desempenho destes meios depende essencialmente do utilizador. Sem o autor ao lado como interlocutor para esclarecer dúvidas ou verificar conclusões, há que prever as reacções do público, conjecturando sobre as questões e comentários que a obra de divulgação nele suscitará. Este foi sem dúvida o aspecto que exigiu mais zelo e empenho, e o que comportou maior risco.

Sobre as dificuldades em formalizar conceitos e ideias matemáticas num vocabulário acessível, por vezes de natureza contaminada e estranha à Matemática, procurei seguir o conselho de Euler [E]⁴. Numa carta em que discursa sobre a natureza da linguagem e a sua importância na comunicação do pensamento e na disseminação do saber, diz:

³ [F] Ferri, M., Geometria da esportazione, Xla Tangente, Nº 6, 50-56, Novembro de 2007.

⁴ [E] Euler, L., Letters to a German princess, Thoemmes Press, 1997.

"(...) *what idea is excited in the mind on hearing the particle and, or also, pronounced? It is readily seen that these words import a species of connection but, take what pains you please to describe this connection, you will find yourself under the necessity of employing other words, whose signification it would be equally difficult to explain; and if I were to attempt an explanation of the import of the particle and, I must make frequent use of that very particle.*"

4. Conteúdo

A primeira secção desta dissertação, *Matemática experimental: alguns exemplos*, refere-se a parte do espólio da exposição *Matemática Viva*, analisa as actividades propostas nesse âmbito, a Matemática envolvida e a que se pretendeu veicular, e discute as suas conexões com outros capítulos desta e de outras ciências.

Parte do trabalho de pesquisa desenvolvido na primeira secção esteve na base da redacção de quatro artigos publicados em revistas de Divulgação da Matemática, e que constituem a segunda secção desta dissertação, que intitulámos *Publicações*.

A terceira secção, *Materiais interactivos para a divulgação da Matemática*, apresentada na forma de um CD e de um documento impresso, centra-se no módulo virtual *Movimento e forma*. O objectivo principal é o de apresentar a um público geral noções topológicas e geométricas a partir do movimento de sistemas de hastes articuladas, usando páginas html e mais de cem animações interactivas realizadas com o programa *Mathematica*⁵.

Contrariamente ao que se passa com programas de Geometria Dinâmica (como o *Cinderella*), o *Mathematica* não inclui rotinas próprias adequadas à descrição do movimento de sistemas articulados no plano e funciona essencialmente com base em construções algébricas. Estas características obrigaram-me a redesenhar o movimento de sistemas articulados em termos de Geometria Analítica. Todavia, a preferência pelo *Mathematica* deveu-se à possibilidade de associar os mecanismos a superfícies (ainda que a sua parametrização tivesse de ser feita de raiz por mim) e de construir figuras com

⁵ <http://www.wolfram.com>

design apelativo que correspondessem precisamente às imagens reais das situações matemáticas descritas.

Por julgar pertinente o trabalho de divulgação dirigido a uma audiência mais conhecedora do assunto, incluí no módulo um percurso alternativo destinado a um público com formação mais avançada em Matemática (digamos, professores de Matemática ou alunos universitários) onde, em particular, se introduz um processo para a construção de todas as superfícies orientáveis, conexas e compactas como espaços de configuração de mecanismos.

Esta secção inclui ainda um documento impresso com uma justificação matemática dos diversos resultados que são apresentados informalmente no módulo virtual. Este é um texto técnico que resultou, em primeiro lugar, da necessidade de compreender o funcionamento dos mecanismos, de clarificar a génese dos espaços de configuração e de construir um vocabulário matemático que traduzisse de modo inequívoco o movimento e posições dos sistemas articulados para a forma e a topologia dos espaços de configuração. Além disso, a bibliografia disponível sobre o tema desta parte da dissertação é escassa e utiliza meios que não se ajustam a um público não especializado. Por isso, houve que inovar na apresentação deste assunto. Porém, só depois de garantida uma compreensão aprofundada a nível formal pude distinguir os detalhes dispensáveis dos essenciais e seleccionar os que se adequariam a uma comunicação deste tema num registo informal. Até por esta experiência, tenho como certo que um conhecimento sólido do conteúdo a divulgar é imprescindível para a tarefa, que também cabe ao divulgador, de desconstruir argumentos formais e elaborar um discurso onde as ideias, os objectos e os raciocínios surjam elementares, acessíveis a um público não familiarizado com a ciência em causa. O resultado dessa demanda é uma contribuição original para a compreensão e visualização dos espaços de configuração dos quadriláteros e pentágonos articulados, e, creio, constitui um roteiro interessante e elementar pela Topologia até às superfícies.

INTRODUCTION

This is a thesis in Mathematics Popularization. With the considerable amount of major doings to raise the public awareness to Mathematics that have recently emerged in Portugal, guided by distinct perspectives and strategies and subject to multiple statistical and sociological assessments of their impact, cataloguing a thesis on Science Popularization admits, nowadays, several meanings. A previous clarification is thus required. The plan proposed for this thesis was to develop original material for the promotion of Mathematics in three distinct formats:

- an illustrated book for an audience only familiar with basic Mathematics;
- the publication of short articles, on carefully chosen topics, in journals devoted to the popularization of Mathematics, whose readers are mostly teachers or university students of Mathematics;
- the construction of an interactive module, on an advanced topic but communicated in an elementary way, which proposes at least two distinct levels of difficulty and is accompanied by a technical textbook with additional mathematical information.

I hope this work will endure and be actually put in practice, so that its impact on the informal learning of Mathematics may be subsequently evaluated.

The endeavour in Science popularization requires a careful choice of contents and approach. Therefore, an academic publication in this field demands an exemplary efficiency in communication. Consequently, in the two components of this thesis,

- the *written*, inspired by the contents of the exhibition *Matemática Viva*
- the *interactive*, in which an original module was built,

it was necessary to formerly clarify goals and the target public, to persevere in the effort to employ accessible but accurate language (that is, correct but without excessive technical details), and ensure a mindful speech, instructive, enlightening and convincing, able to stimulate curiosity and promote Mathematics in an innovative and attractive way.

Mathematics, regarded by a vast majority of the population as understandable only by a few talented, without a regular presence in the media nor the tradition of keeping the public informed about its discoveries and applications, poses additional difficulties to the Science disseminator. Namely:

1. *What criteria to use in selecting topics?*

Deciding always for the most simple and of immediate reading does not suit an audience that appreciates challenges and also values an active participation in its own learning. The promotion of Mathematics, using different channels (publications, exhibitions, games, software, films, etc), has currently numerous supporters and valuable contributions, an inestimable source of inspiration. However, the most important motivation for this thesis was aroused by *Matemática Viva*, the biggest exhibition with mathematical contents ever held in Portugal. Inaugurated in 2000 to celebrate the World Year of Mathematics, it was on display until August 2010 in Lisbon and is authored by Associação Atractor¹. It received a large number of visitors - more than two million, according to data from Pavilhão do Conhecimento - and it has been praised and cited, both nationally and internationally² ([C]). Having had the privilege of working, as a teacher on secondment, in Associação Atractor since its beginning, I've been directly involved in the design and execution of that exhibition. It remained open to the public for ten years and its modules, recently returned to Associação Atractor, show considerable signs of wear. Therefore, I considered this to be the right time to record in a book (not a mere catalogue) a full

¹ <http://www.atractor.pt>

² [C] Crato, N., *A Matemática das Coisas*, Gradiva, 2008.

description of some of the modules, which will leave to coming generations a testimony of its undeniable quality. Being impossible to examine thoroughly all the modules, due to their large number (about seventy), I have selected those with a manifest bond to the academic curriculum at several levels of Science learning in the country and those which seem to rouse natural empathy in the public. I have also tried to diversify the range of subjects and, whenever convenient, emphasize applications to real life.

2. *For what sort of audience is this work intended?*

It is certainly desired that it may be appreciated by experts, yet it is mainly addressed to the general public, with only a basic knowledge of Mathematics. However, as this is an anonymous public, it was necessary to adapt the scientific speech in the several instances of the thesis to the lore of an ideal audience. My options were the following:

(a) The book *Matemática Experimental: alguns exemplos* (Experimental Mathematics: a few examples) was thought for a reader somewhat familiar with Mathematics, evincing at least the skill which students are expected to have acquired by the end of the ninth grade.

(b) The articles *Matemática nel calcio* (Mathematics in football), *Con un giro di ruota* (Around the wheel) and *O que é uma cônica?* (What is a conic?) were addressed to a wider public, non-expert though interested in Science.

(c) The article *Estradas para rodas exóticas* (Roads for exotic wheels) is more technical but can be understood by a university student of Mathematics.

(d) The interactive module *Movimento e Forma* (Movement and shape) has been intended for users prompted by one of the essential features of Mathematics which is one of the keys for its success: the ability to use simple and intuitive concepts and methods (like the movement of an articulated system) to understand abstract notions (such as curve or surface) and generalize them. It offers two paths, the optional, more demanding in what concerns the user's

previous mathematical training, and the main path, accessible to everyone.

(e) The textbook which complements the virtual module is a mathematical text whose aim is to discuss how to carry geometrical concepts on the plane and space, familiar to almost everyone, to sets where points and distances represent something more general and allow other interpretations (as it is wisely explained by the author of [F]³). The arguments used in the text are elementary but they only benefit those who have already trained to use what they have learnt to discover new mathematics.

3. *Which is the most efficient approach?*

If in an interactive module it is possible to lead the learning and ensure certain goals, and a competent book can be a very efficient vehicle to transmit elementary scientific information, the truth is that the good performance of these devices depends mainly on the user. Without the author nearby as an interlocutor to remove doubts or check conclusions, one must foresee the public's reactions, guessing the questions and comments this Science popularization material may raise. This was undoubtedly the feature that demanded the greatest zeal and commitment, and the one involving the highest risk.

Concerning the difficulties in formalizing mathematical concepts and ideas using an accessible vocabulary, occasionally of a contaminated nature and strange to Mathematics, I tried to follow Euler's advice [E]⁴. In a letter where he analyses the gist of language and its importance for the communication of the thoughts and the dissemination of knowledge, he says:

"(...) what idea is excited in the mind on hearing the particle and, or also, pronounced? It is readily seen that these words import a species of connection but, take what pains you please to describe this connection, you will find yourself under the necessity of employing other words, whose signification it would be

³ [F] Ferri, M., *Geometria da esportazione*, XlaTangente, N° 6 (2007), 50-56.

⁴ [E] Euler, L., *Letters to a German princess*, Thoemmes Press, 1997.

equally difficult to explain; and if I were to attempt an explanation of the import of the particle and, I must make frequent use of that very particle."

The first section of this thesis, *Matemática experimental: alguns exemplos*, imparts information on the contents of the exhibition *Matemática Viva*, examines the proposed activities in that context, the Mathematics involved and the one intended to be conveyed, and discusses its connections with other chapters of this and other sciences.

Part of the research work developed in the first section was the basis to write the four articles published in journals devoted to the popularization of Mathematics, and which constitute the second section of this thesis, entitled *Publicações* (Publications).

The third section, *Materiais interactivos para a divulgação da Matemática* (Interactive materials for Mathematics Promotion), presented in a CD and a printed document, focuses on the virtual module *Movimento e forma*. The main purpose is to present to a general audience topological and geometrical notions based on the movement of articulated rod systems, using html pages and over a hundred interactive animations done with the program *Mathematica*⁵.

Contrary to what happens with some Dynamic Geometry software, like *Cinderella*, *Mathematica* does not include its own routines fit to the description of the movement of articulated systems on the plane and it works essentially supported on algebraic constructions. These features forced me to redesign the movement of articulated systems in terms of Analytic Geometry. However, the preference for *Mathematica* was due to the possibility of linking the mechanisms to surfaces (though its parameterization had to be made from scratch by me) and of making pictures with appealing *design* which matched precisely the real images of the described mathematical configurations.

Considering it appropriate to address the work of Science Promotion to an audience with more expertise in this field, I have included in the module an alternative path intended for a public with more advanced training in Mathematics (such as Mathematics teachers or university students) which, in

⁵ <http://www.wolfram.com>

particular, includes a method for the construction of all closed, orientable, connected and compact surfaces as configuration spaces of mechanisms.

This section also contains a printed document with scientific explanations of the different results presented informally in the virtual module. This is a technical text which resulted primarily from the need to understand the functioning of the mechanisms, to clarify the genesis of the configuration spaces and create a mathematical vocabulary suitable to render unequivocally the movement and positions of the articulated systems into the shape and topology of the configuration spaces. Furthermore, the available bibliography on the subject of this part of the thesis is scarce and uses arguments that are not suitable for a non-specialist audience. Therefore, it was necessary to innovate in the presentation of this subject. However, only after having acquired a thorough understanding at a formal level could I distinguish the dispensable from the essential details and then select the ones suitable for a communication of this topic in an informal register. Due to this very experience, I have it for certain that a solid knowledge of the contents to be conveyed is indispensable for the task, which is also the promoter's duty, of deconstructing formal arguments and developing a type of speech where the ideas, objects and reasoning emerge as elementary, accessible to an audience unfamiliar with the science in question. The result of that search is an original contribution for the understanding and visualization of the configuration spaces of articulated quadrilaterals and pentagons, and, I believe, proves to be an enthralling and pervious route through Topology up to surfaces.

CONTEÚDO

1. LIVRO.....

- MATEMÁTICA EXPERIMENTAL:
ALGUNS EXEMPLOS

2. PUBLICAÇÕES.....

- MATEMATICA NEL CALCIO
- CON UN GIRO DI RUOTA
- ESTRADAS PARA RODAS
EXÓTICAS
- O QUE É UMA CÓNICA?

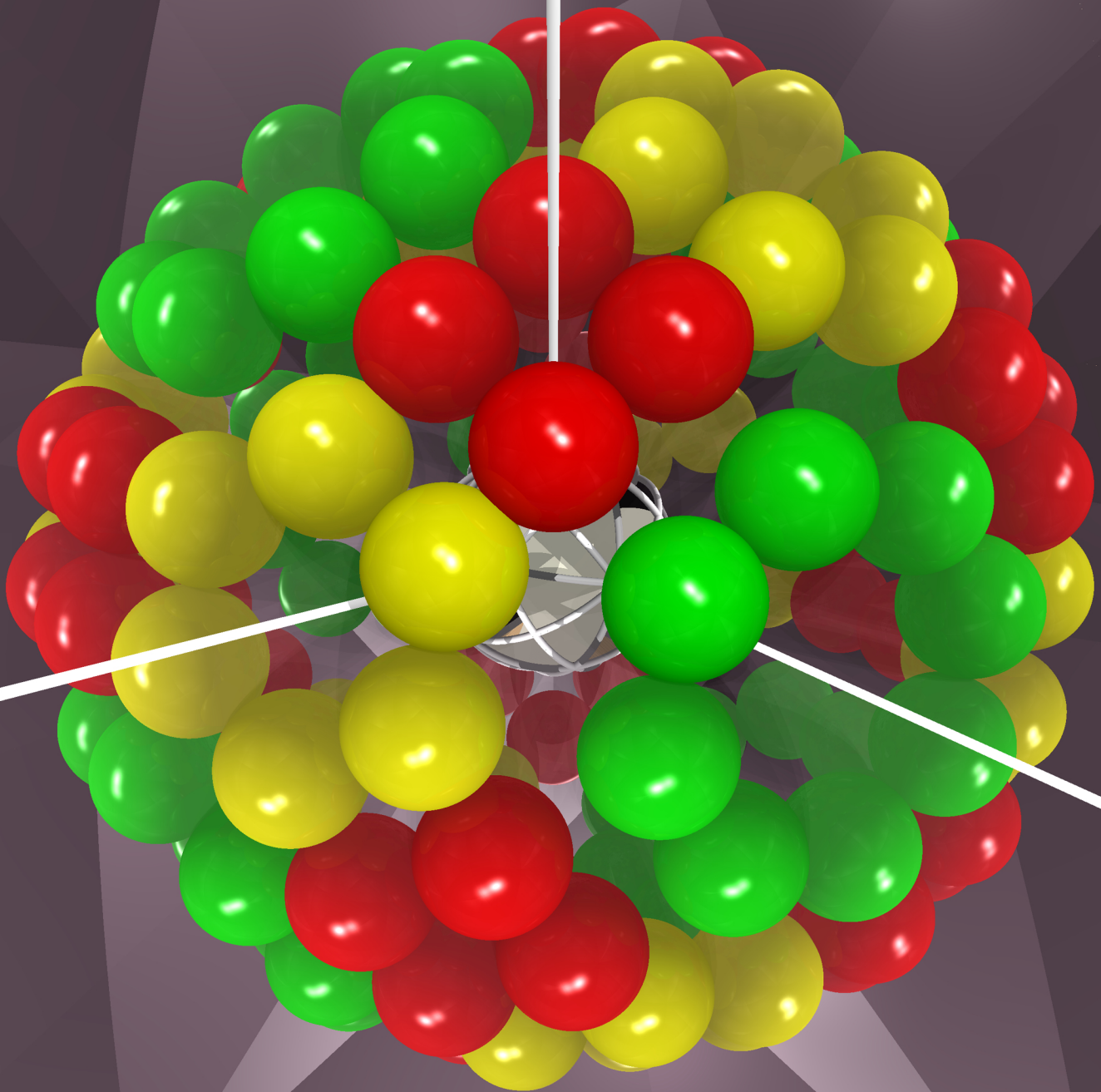
3. MATERIAIS INTERACTIVOS PARA A DIVULGAÇÃO DA MATEMÁTICA

- MÓDULO VIRTUAL:
MOVIMENTO E FORMA
- COMPÊNDIO COM
INFORMAÇÃO ADICIONAL

MATEMÁTICA EXPERIMENTAL: ALGUNS EXEMPLOS

Matemática Experimental

alguns exemplos



Ana Cristina Oliveira

À Associação Atractor - Matemática Interactiva, pela cedência de imagens, por ter permitido a exibição, neste livro, de parte do seu vastíssimo espólio assim como ter aceite e apoiado a utilização da sua obra como objecto de estudo neste livro.

Às Professoras Maria Carvalho e Maria Dedò, um forte agradecimento pela revisão do livro e pelos inúmeros conselhos e sugestões. As correcções foram preciosas, mas apenas à autora cabe a responsabilidade pelos erros que possam eventualmente existir.

À Alexandra Faria e ao Professor Paulo Ventura Araújo, pelas fotografias cedidas.

A todos os que de alguma forma colaboraram para a concretização deste livro, em particular, à minha mãe.

Por fim, um agradecimento especial ao Professor Arala Chaves, com quem, após treze anos de trabalho na Associação Atractor, continuo sempre a aprender.

Índice

Prefácio	i
Índice dos capítulos	1
Capítulo I	Poliedros ao espelho	2
	1. O módulo	8
	2. Para saber mais	36
	3. Geométrica Esférica	36
Capítulo II	À volta da roda	41
	1. A Matemática do futebol	46
	2. Rodas de largura constante	52
	3. Para saber mais	66
	4. Ângulos versus cordas	67
	5. Rodas exóticas	69
Capítulo III	Cónicas e bilhares	78
	1. O que é uma cónica?	82
	2. Descrição métrica	84
	3. Definições equivalentes	92
	4. Aplicações	98
	5. Os módulos	102
	6. Cónicas no dia-a-dia	108
	7. Dois módulos, uma superfície	112
	8. Para saber mais	117
	9. Equações	117
	10. Uma roda muito especial	117
Capítulo IV	Jogos e fractais	119
	1. O módulo	123
	2. Jogando noutros polígonos	131
	3. Para saber mais	133
	4. Conjunto ternário de Cantor	133
	5. Idioma dos números	136
	6. Base 3	137
	7. Infinito	141
	8. Um jogo	142
	9. Breve digressão por fractais	147
	10. Conjunto de Mandelbrot	154
Bibliografia		157
Ficha Técnica		159

Prefácio

Os tempos em que as descobertas e experiências científicas eram apenas acessíveis a um mundo restrito de especialistas pertencem ao passado. Actualmente é enorme, e francamente popular, o repertório de notícias e actividades propostas em museus, centros interactivos, instituições universitárias, revistas científicas ou jornais de circulação geral, no sentido da vulgarização das conquistas em Ciência. A Matemática, acusada de ser fonte de insucesso escolar, de se reduzir à aritmética e de ser um mero instrumento das outras ciências, essas sim úteis, é por muitos vista como uma área de difícil popularização. cremos, contudo, que quase todos podem, de facto, compreender e surpreender-se agradavelmente com ideias matemáticas simples, e que o seu interesse pode ser estimulado se devidamente guiado nessa exploração do valor intrínseco do edifício matemático. E é essa a tarefa a que nos propomos neste livro: conduzir o leitor numa breve digressão por essa vasta estrutura de saberes e de aplicações que genuinamente o entusiasme. O mapa dessa visita resume-se a quatro capítulos de exploração independente, mas há em muitas esquinas indicação de referências com informação complementar cuja leitura se aconselha.

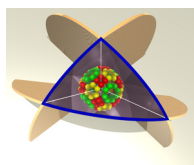
A redacção de um texto de divulgação é uma tarefa árdua, mesmo havendo na literatura inúmeras fontes de inspiração e ensinamento. Não se trata apenas de apresentar ciência, mas de o fazer de um modo criativo e com um mínimo de originalidade. É preciso cativar os leitores, que não estão obrigados a um esforço de compreensão que julgamos natural pedir a alunos numa aula ou a uma audiência de especialistas. Além disso, um livro não é interactivo, e o divulgador tem de saber como manter, apenas através do texto, o interesse do seu leitor. Acresce que, apesar de se tratar, em geral, de textos com conteúdo matemático elementar, essa natureza não pode comprometer o seu rigor e correcção, e a linguagem utilizada tem de conjugar qualidade científica com facilidade de leitura. Ora este é um equilíbrio difícil de atingir. Exemplos há em que, supondo que o leitor não entenderá, se omitem termos técnicos, se dão exemplos pouco credíveis, tornando o texto impreciso e sujeito a interpretações ambíguas. Ocasionalmente, mas com idêntico insucesso na comunicação, opta-se por um estilo completo e pormenorizado, que fundamenta exaustivamente tudo o que se afirma: o leitor, se terminar a leitura, sai informado mas nem sempre convencido ou seduzido pelo que leu. A escolha dos temas é outro problema para quem divulga, pois não pode guiar-se apenas pelo seu gosto pessoal. Como intermediário entre quem faz ciência e o público que se pretende entusiasmar, precisa de conhecer mais do que conta para decidir quando abandonar o tom generalista e introduzir tópicos especializados; de se empenhar na ilustração, com imagens de qualidade e esquemas elucidativos que agilizem a leitura; e de saber quando fazer uma pausa para reflectir com o leitor sobre a relevância do que ele está a ler.

Tendo tido o privilégio de trabalhar, desde a sua génese em 1998, no Atractor, uma associação pioneira em Portugal no seu objectivo de promover e divulgar a Matemática, a autora pôde acompanhar e co-organizar inúmeras acções de divulgação, em particular uma das mais grandiosas: a exposição Matemática Viva, inaugurada em 2000 para comemorar o Ano Mundial da Matemática e que afinal esteve patente cerca de dez

anos no Pavilhão do Conhecimento. Esta mostra serviu de mote para a redacção deste livro e não apenas pela sua dimensão (mais de 70 módulos, o que por si só justifica o registo do seu espólio para memória futura), ou pelo seu êxito (estima-se, pelos dados do Pavilhão do Conhecimento, que recebeu cerca de dois milhões de visitantes). O mérito desta exibição de Matemática assentou na notável diversidade dos módulos e no seu grande valor educativo. Contudo, este livro não é um mero catálogo da exposição entretanto encerrada. Com ele, apresentamos ideias e métodos matemáticos de áreas e níveis diversos, inspiradas pelos módulos da exposição mas não se reduzindo ao seu conteúdo, tentando não poupar detalhes pertinentes ou escamotear subtilidades de teor científico. Esperamos que o nosso empenho neste contributo para a divulgação da Matemática seja proporcional ao entusiasmo que suscite no leitor.

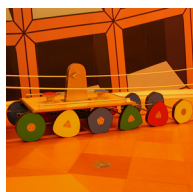
No âmbito do trabalho de pesquisa que antecedeu a redacção deste livro, a autora contactou a Agência Nacional Ciência Viva, solicitando dados de teor estatístico recolhidos pelo Pavilhão do Conhecimento ao longo de quase uma década de visitas à exposição Matemática Viva. Teria sido interessante e revelador conhecer a opinião dos vários tipos de visitantes sobre a importância desta mostra, nomeadamente: a facilidade em aceder ao conteúdo dos módulos e as dificuldades em resolver os desafios propostos; a qualidade dos guiões de apoio; os comentários e críticas dos profissionais envolvidos na monitorização e manutenção do espólio; a robustez do material interactivo; as vantagens pedagógicas deste tipo de popularização da ciência; a utilização da informação matemática veiculada na exposição, ou suscitada por ela, em eventos escolares ou noutros centros de promoção de ciência; a adequação dos temas escolhidos aos objectivos desta iniciativa; o impacto no conhecimento matemático de um público vasto que se pretendeu entusiasmar em ambiente não académico. Contudo, tal informação nunca foi disponibilizada e, por isso, os aspectos sociológicos desta exposição não puderam ser analisados ou tidos em conta neste texto.

Índice



01 Poliedros ao espelho

Juntemos três espelhos triangulares num vértice e coloquemos entre eles um objecto. Obtemos uma imagem tridimensional que nos impressiona pela simetria que exhibe. O que significa matematicamente esta afirmação?



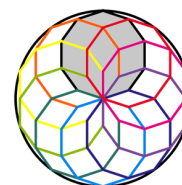
02 À volta da roda

A circunferência é o conjunto de pontos do plano que distam o mesmo de um ponto fixado. Mas esta não é a única propriedade que só esta curva satisfaz. Ponderaremos, usando jogadas de futebol e um carrinho com rolamentos bizarros, sobre outros modos de a caracterizar.



03 Cónicas e bilhares

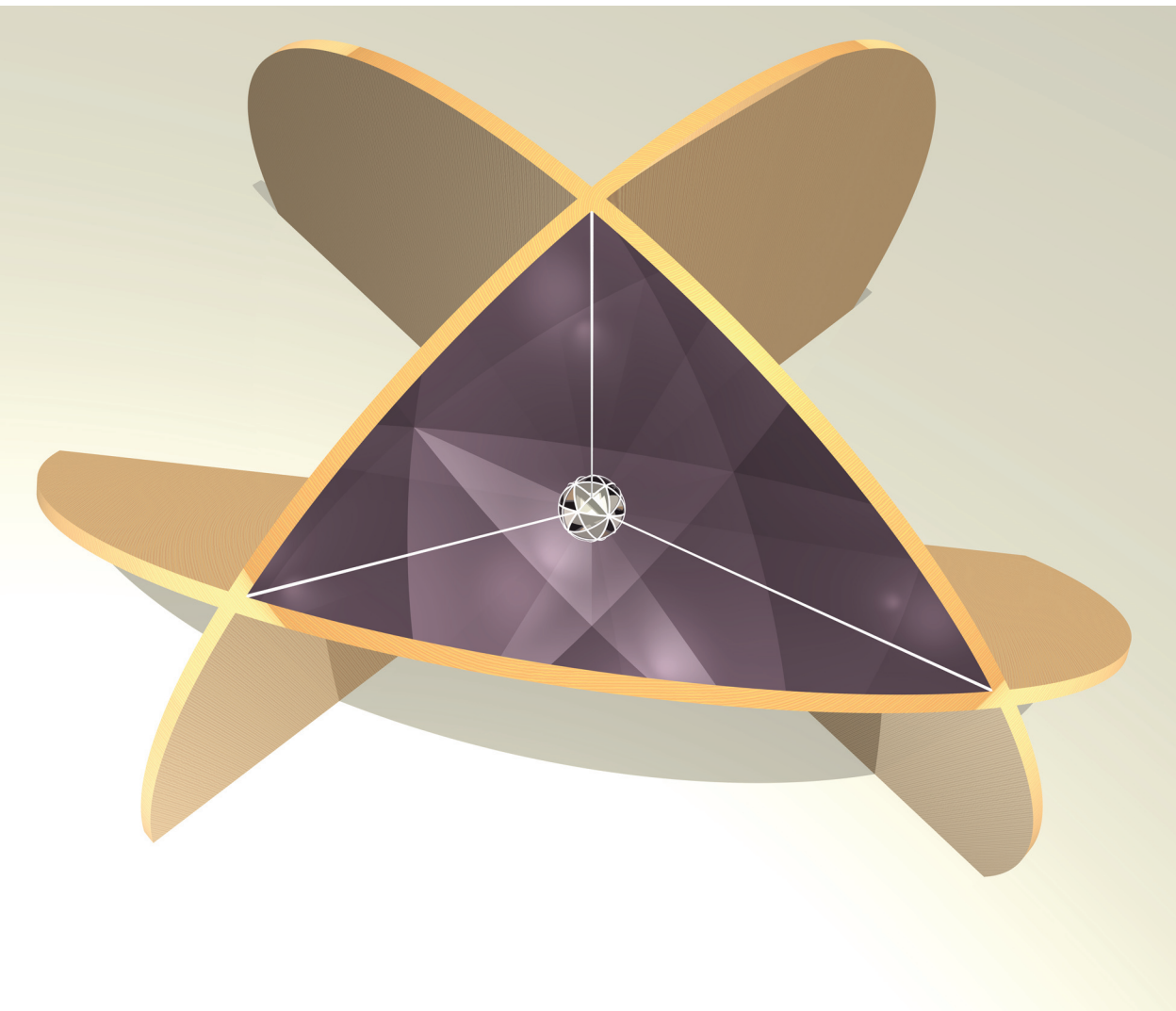
A dinâmica das bolas num bilhar depende essencialmente do formato da mesa. Apresentaremos aqui os casos especiais de bilhares cujo bordo é uma cônica, curvas que observamos no movimento dos astros ou na sombra de uma vara na vertical.



04 Jogos e fractais

Num jogo não interessa apenas ganhar. Como veremos, maior prazer vem de retirar do conhecimento de estratégias vencedoras, da matemática a elas associada e dos objectos surpreendentes que o conjunto de jogadas admitidas pode criar.

01 Poliedros ao espelho



Secções

O módulo
Para saber mais



1.1 Fotografia de dois caleidoscópios tridimensionais - do cubo e do tetraedro - patentes na exposição Matemática Viva.



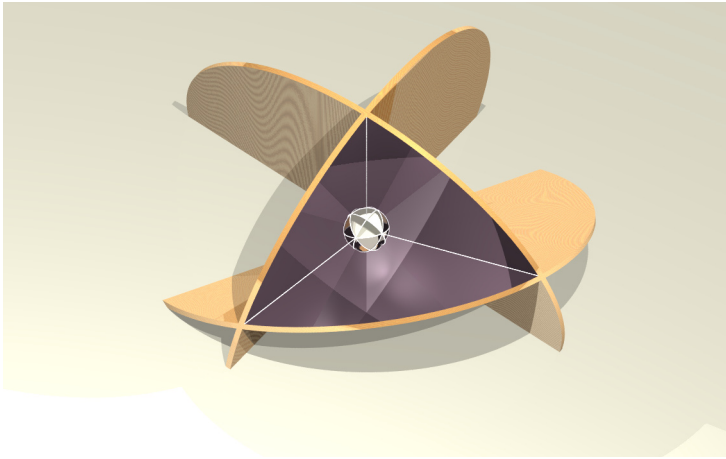
fig 1.2

Há já muitas gerações que os caleidoscópios constituem um dos brinquedos mais populares na infância. Visto do exterior, esse objecto não é mais do que um cilindro com um monóculo numa das bases de onde se observam imagens que maravi-lham com a panóplia de diferentes padrões colori-dos. Abrindo o caleidoscópio, o interior reserva-nos uma surpresa adicional: ele é constituído apenas por três espelhos adequadamente colocados e pe-quenos pedaços coloridos de vidro. O encanto pro-vocado pela beleza das imagens de um caleidos-cópio não resulta apenas da cor, mas também da simetria com que as peças coloridas se distribuem. É exactamente na perspectiva da simetria que, neste capítulo, analisaremos alguma da Matemá-tica ligada aos caleidoscópios.

Os caleidoscópios que nos vão interessar nesta secção não são os comuns caleidoscópios da infância, mas um outro tipo menos familiar: em vez de imagens planas, permitem-nos observar objectos tridimensionais (3D); e, entre estes, interessam-nos particularmente os poliedros.



fig 1.3

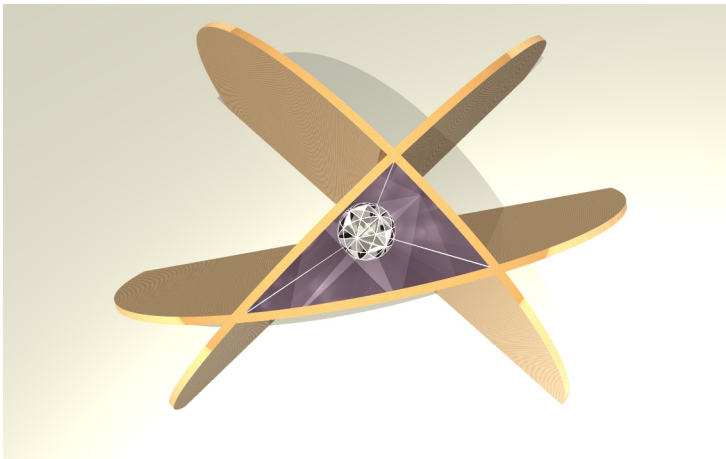


1.4

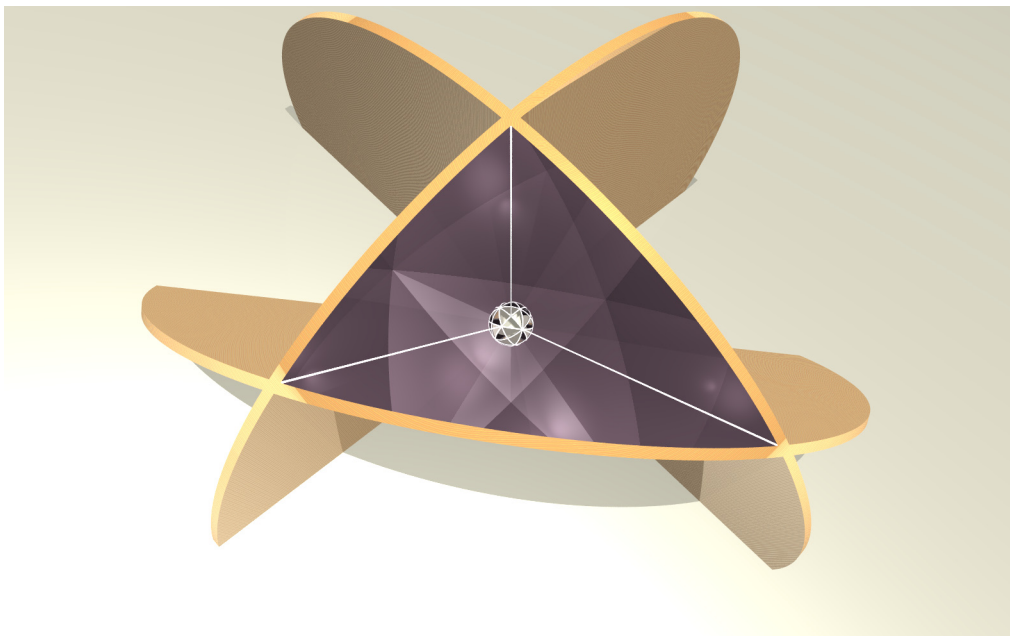
1.4 Caleidoscópio do tetraedro (exposição Simetria - jogos de espelhos).

1.5 Caleidoscópio do dodecaedro (exposição Simetria - jogos de espelhos).

1.6 Caleidoscópio do cubo (exposição Simetria - jogos de espelhos).



1.5



1.6

Quem entrava no recinto da exposição *Matemática Viva*¹, no Pavilhão do Conhecimento, e se dirigia à seção dedicada à Simetria deparava-se com pirâmides abertas, revestidas internamente por espelhos, que pareciam emergir da mesa de apoio. A sua imponência e a forma como estavam enquadrados na exposição levava a que, naturalmente, prendessem a atenção do visitante. As belas imagens neles produzidas funcionavam como um chamariz adicional.

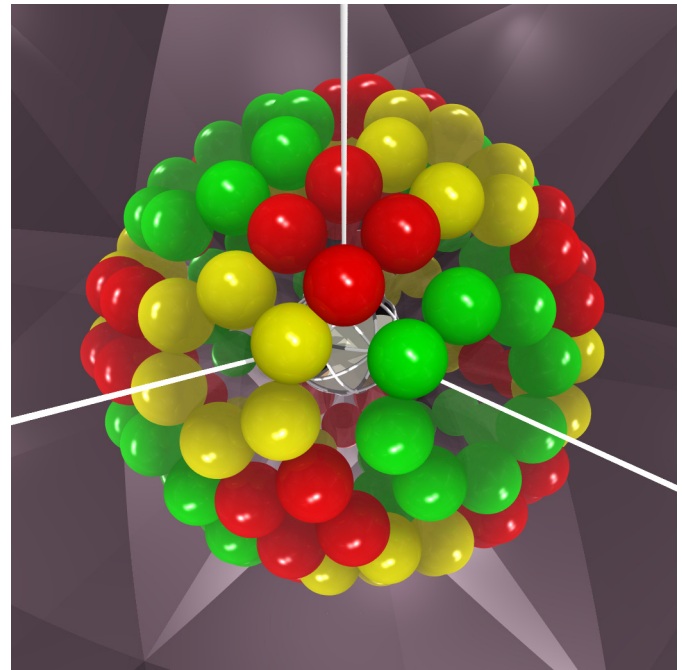
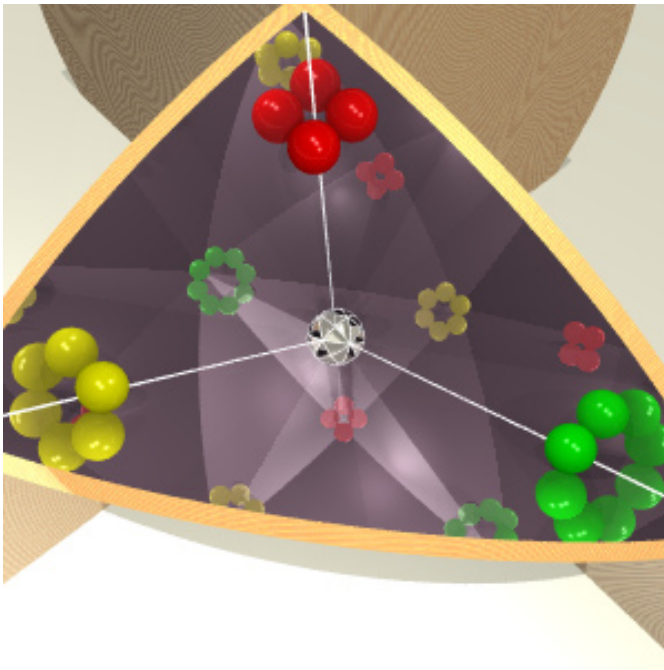
Os caleidoscópios patentes na exposição *Simetria - jogos de espelhos*², realizada pela Associação Atractor, uma versão ligeiramente ampliada de uma exposição criada no Departamento F. Enriques, em Milão (informação suplementar na referência [BCCFGSV]), têm um aspecto diferente dos da exposição *Matemática Viva*, mas funcionam exactamente da mesma forma e o efeito é o mesmo.

No que se segue, o leitor poderá observar o uso de três caleidoscópios distintos - que designaremos por caleidoscópio do cubo, do tetraedro e do dodecaedro e que, como veremos, são os únicos interessantes -, como funcionam, que figuras geométricas podem gerar, qual a intervenção neste âmbito dos sólidos platónicos e ainda entender como é que em *Matemática* se formaliza a noção intuitiva de Simetria.

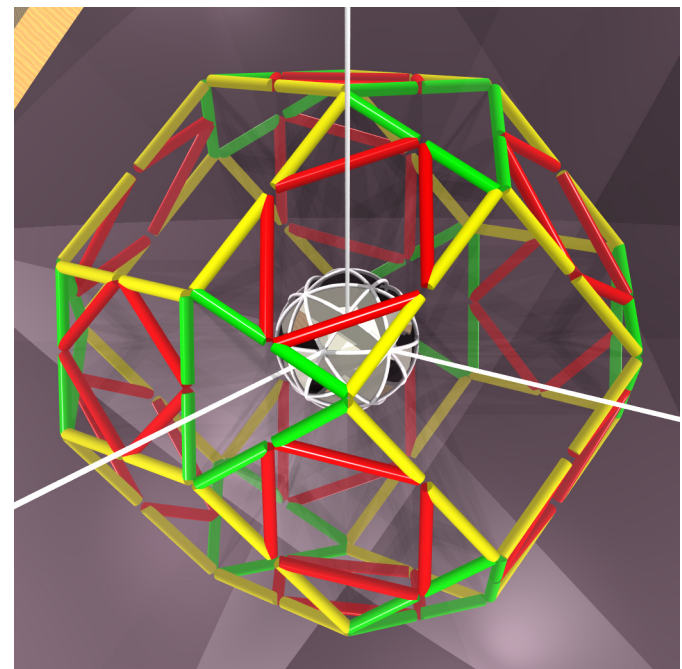
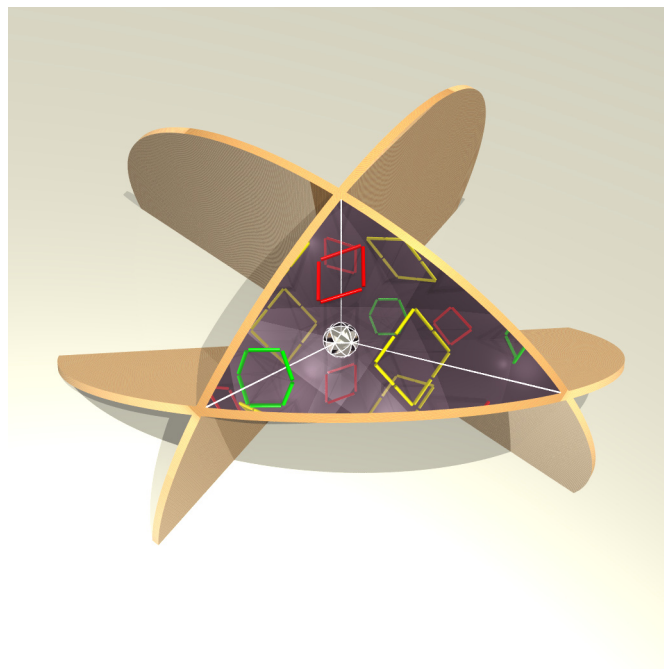
Para o leitor mais curioso, sugerimos a consulta de [BCG].

1 Para informação adicional sobre a exposição, consultar a referência [web2].

2 Para informação adicional sobre a exposição, consultar [web5].



1.7



1.8

1.7 No caleidoscópio do cubo, foram colocadas três bolinhas rentes a cada um dos três pares de espelhos, em duas posições diferentes.

1.8 No caleidoscópio do cubo, foram colocadas três palhinhas rentes a cada um dos três pares de espelhos, em duas posições diferentes.

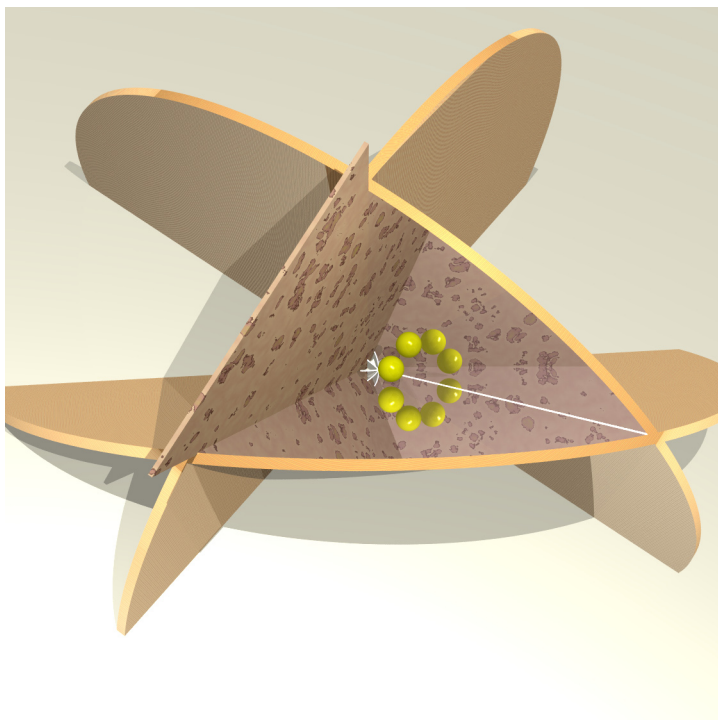
O módulo

O que esperamos obter nestes objectos espelhados?

Num primeiro momento, é natural o utilizador explorar livremente o caleidoscópio, colocando arbitrariamente diferentes formas e visualizando o efeito conseguido (como ilustrado ao lado). Embora as imagens obtidas no caleidoscópio sejam diferentes entre si, rapidamente se aperceberá que, independentemente do objecto lá colocado, essas imagens têm algo de semelhante, existe o que nos parece ser uma estrutura comum. Testando essa impressão com outros objectos, e de uma forma totalmente experimental, reforçamos a nossa intuição de que todas as figuras visíveis no caleidoscópio são simétricas, embora, nesta fase, talvez não tenhamos ainda uma ideia clara sobre o que isso significa.

Analisando as figuras ao lado, verificamos que, em ambos os casos, se formam 6 anéis de 8 bolinhas/palhinhas verdes, 8 anéis de 6 bolinhas/palhinhas amarelas e 12 anéis de 4 bolinhas/palhinhas vermelhas (e observe que $6 \times 8 = 8 \times 6 = 12 \times 4 = 48$). A forma como esses anéis se distribuem no espaço é também muito semelhante nas duas imagens.

A simples constatação de que se formam, respectivamente, anéis de 8, 6 e 4 bolas em torno de cada par de espelhos pode levar-nos desde já a tirar uma conclusão pertinente quanto à amplitude dos ângulos dos espelhos. Começemos por observar as imagens apresentadas na próxima página.

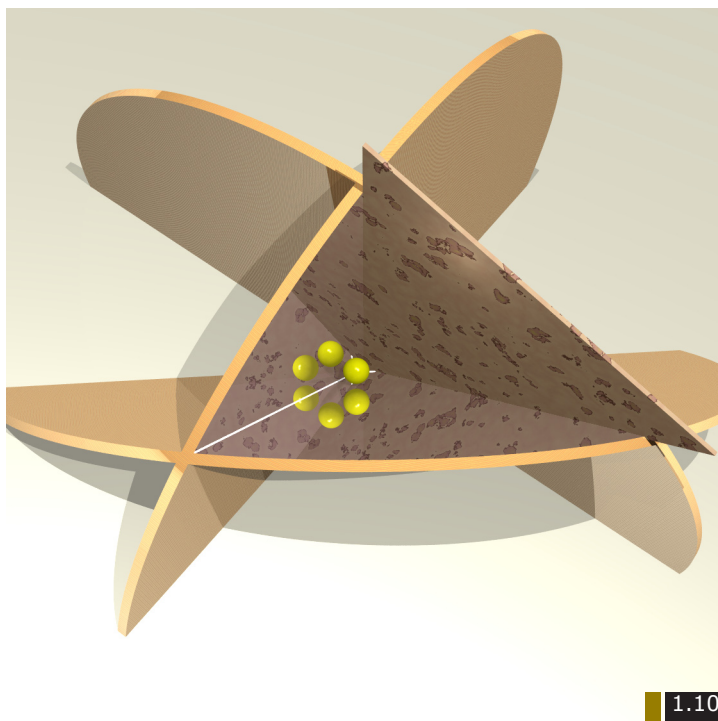


1.9

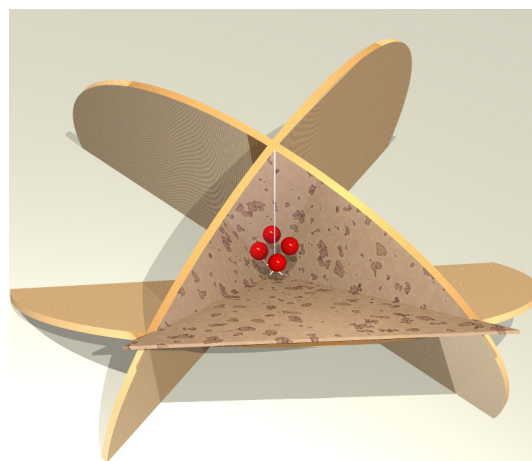
1.9 No caleidoscópio do cubo, um dos espelhos foi tapado e colocou-se uma única bolinha: forma-se um anel com oito bolinhas à volta do par de espelhos visíveis.

1.10 No mesmo caleidoscópio, cobrindo outro espelho, é seis o número de bolinhas visíveis.

1.11 Procedimento análogo para o terceiro espelho: o número de bolinhas é agora 4.



1.10



1.11

A figura 1.9, ao lado, representa a imagem obtida no caleidoscópio do cubo quando lá foi colocada uma bolinha e um dos espelhos foi tapado com uma placa de cortiça. Observando a imagem, que conclusão se tira quanto à amplitude dos ângulos entre o par de espelhos não escondidos? Uma vez que em torno desses espelhos é visível um anel constituído por 8 bolinhas, a amplitude é de $360^\circ/8$, ou seja, 45° .

E quais são as amplitudes dos ângulos entre os outros pares de espelhos? Na figura 1.10, alterou-se a posição da placa de cortiça, tapando-se um outro espelho. A amplitude, deduzimos como anteriormente, é agora de $360^\circ/6$, isto é, 60° . Finalmente, observando a imagem 1.11, concluímos que a amplitude do ângulo entre o último par de espelhos é de 90° ($360^\circ/4$).

Vimos já que o caleidoscópio do cubo é constituído por três espelhos e determinámos os ângulos entre esses espelhos, mas, até ao momento, ainda não foi indicado qualquer motivo para este caleidoscópio estar relacionado com um cubo. Em ambas as exposições, ao lado do caleidoscópio, encontram-se algumas peças que o acompanham. Escolhendo a peça representada na figura 1.12 e colocando-a dentro do caleidoscópio é desvendado o motivo para a designação "caleidoscópio do cubo". Na próxima página encontram-se algumas imagens virtuais de fases distintas do processo de inserção da peça, até, no fim, se obter o cubo.

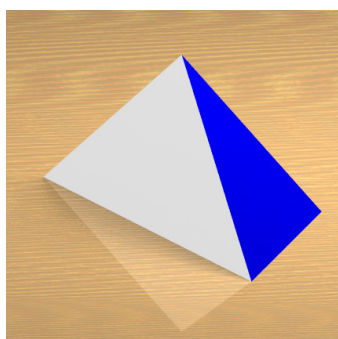
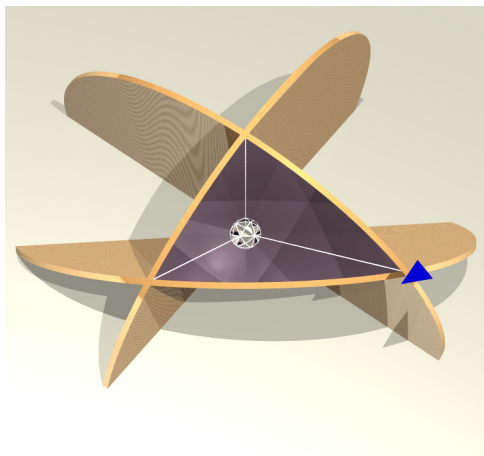
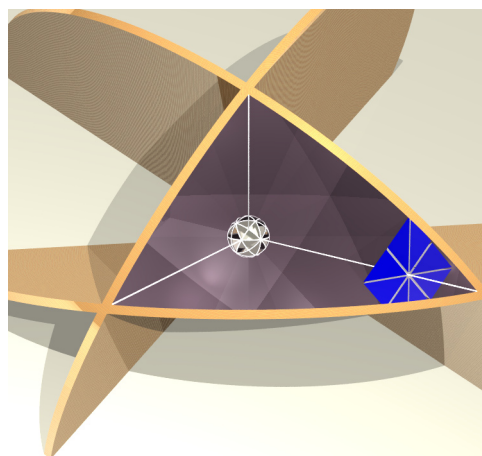


fig 1.12

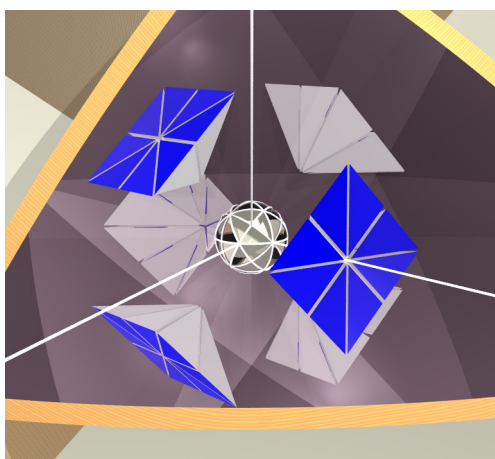
No final, o cubo visível parece fragmentado em várias pirâmides triangulares iguais (página seguinte). Quantas são? E por que é que a peça do cubo tem uma forma tão peculiar?



1.13

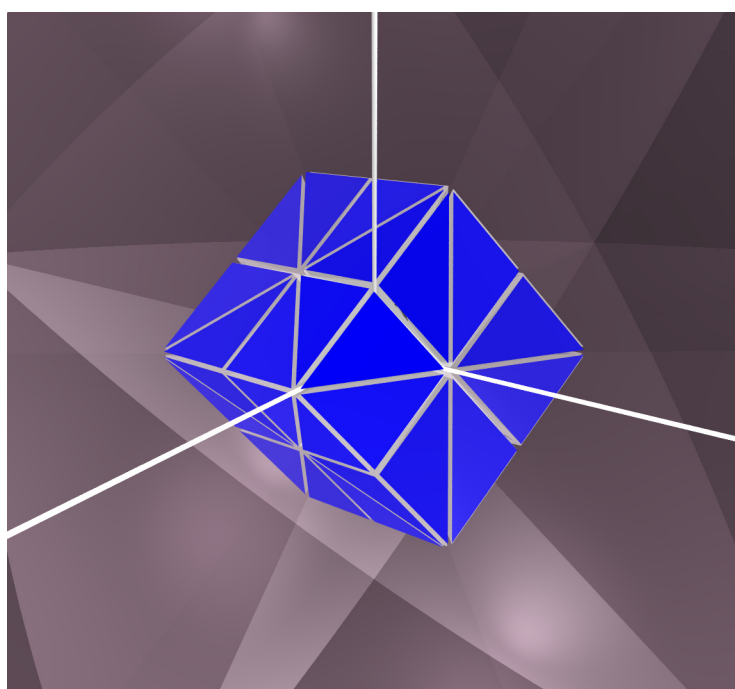


1.14



1.15

No caleidoscópio do cubo foi colocada uma pirâmide triangular azul - fig 1.13. As restantes imagens correspondem a fases distintas do processo de inserção da peça no caleidoscópio; na última figura obteve-se o cubo.



1.16

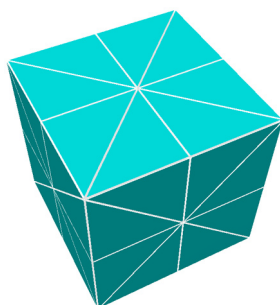


fig. 1.17

Observando que em cada face do cubo desembocam 8 pirâmides e o cubo tem 6 faces, concluímos que o número de pirâmides é (mais uma vez!) 48. Percebe-se agora que a recorrência com que o número 48 aparece associado a este caleidoscópio não é uma mera coincidência. Qualquer objecto que coloquemos neste caleidoscópio será replicado 48 vezes.

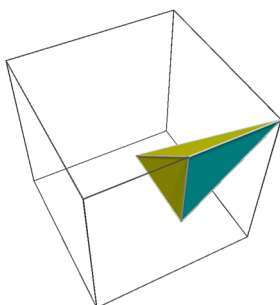


fig. 1.18

E como explicar as formas da peça e do caleidoscópio do cubo? Como vimos, o cubo pode ser fragmentado em 48 pirâmides iguais. Isso acontece quando ele é intersectado simultaneamente por 9 planos distintos; ora esses 9 planos não são mais do que todos os planos de simetria do cubo (fig 1.25). Se isolarmos uma das pirâmides – por exemplo, a pirâmide ao lado – podemos confirmar que a peça do cubo tem a forma desta pirâmide. Acresce que, se retirarmos a face representada a azul na figura ao lado, obtemos um triedro com a forma do caleidoscópio do cubo.

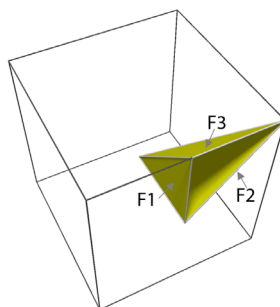


fig. 1.19

Compreende-se agora o resultado a que chegámos, experimentalmente, quanto à amplitude dos ângulos entre os lados espelhados do caleidoscópio do cubo. Retirando a base à pirâmide obtida (fig 1.19) – a azul – e calculando os ângulos entre as restantes faces concluímos que:

- as faces F1 e F2 (fig 1.20) são perpendiculares ao plano da base e, portanto, o ângulo (diedral) entre elas é igual à amplitude do ângulo (no plano) resultante da sua intersecção com o plano da base, que é $360^\circ/8$, ou seja 45° .

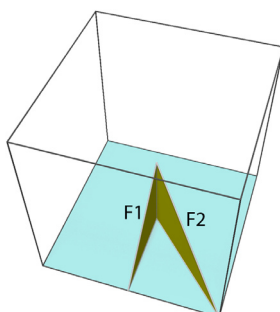
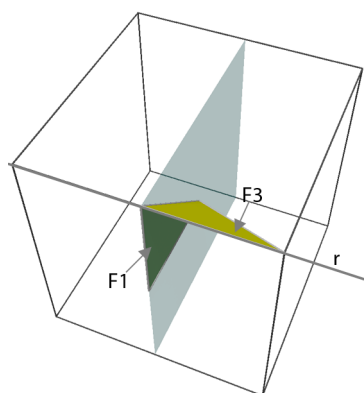


fig. 1.20



1.21

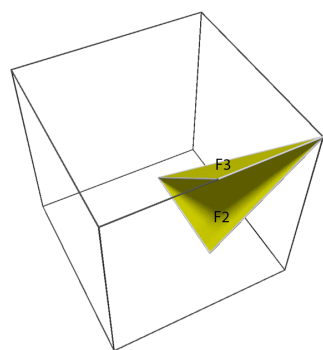
1.21 As faces F1 e F3 fazem um ângulo de 90° : basta observar que a recta r é perpendicular a F1.

1.22 Representação das faces F2 e F3.

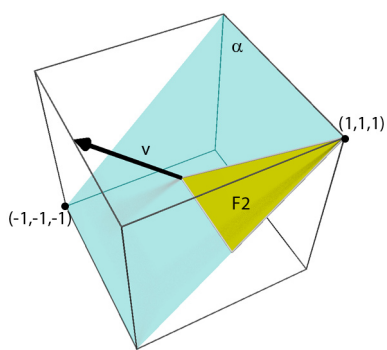
1.23 A face F2 está contida em α , que tem como vector normal v .

1.24 A face F3 está contida em β , que tem como vector normal u .

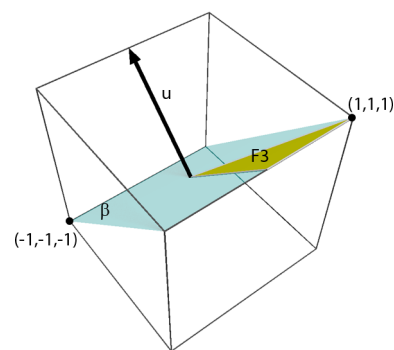
1.25 Planos de simetria do cubo.



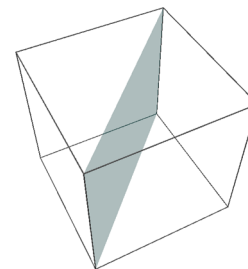
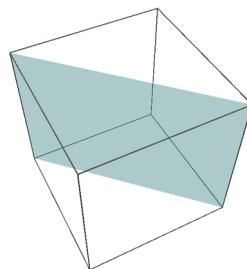
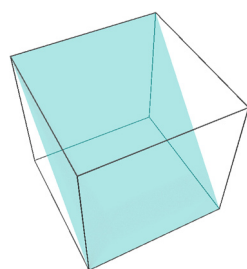
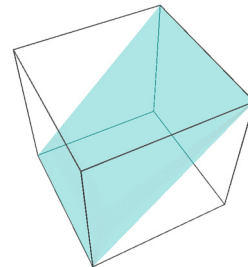
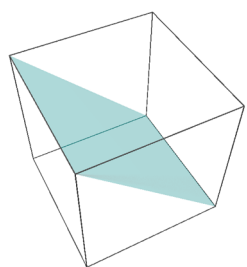
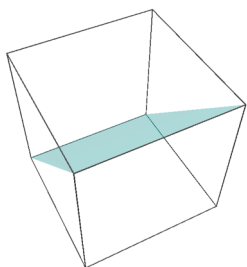
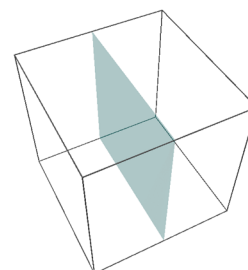
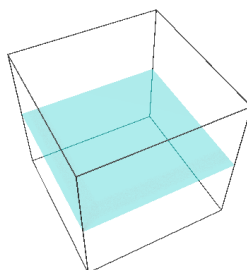
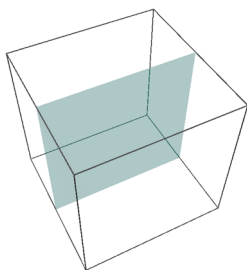
1.22



1.23



1.24



1.25

- Como o plano que contém F3 contém também a recta r e esta é uma recta perpendicular a F1 (fig 1.21), conclui-se que F3 e F1 são perpendiculares entre si.

- Por fim, para encontrarmos o terceiro ângulo (fig 1.22), note-se que a face F2 está contida no plano α (fig 1.23), pelo que tem como vector normal o vector v , de coordenadas $(0, -1, 1)$. Analogamente, a face F3 está contida no plano β (fig 1.24) e tem vector normal com coordenadas $(-1, 0, 1)$. Se a designa a amplitude do ângulo entre u e v , sabemos que

$$u.v = |u||v| \cos(a)$$

onde $u.v$ designa o produto interno usual no espaço. Logo, $1 = 2 \cos(a)$, de onde se deduz que a é igual a 60° .

O caleidoscópio do cubo pode ser utilizado para produzir uma panóplia de diferentes imagens tridimensionais, mas aqui apenas referiremos um tipo de entidades: os poliedros. Mas, o que é um poliedro?

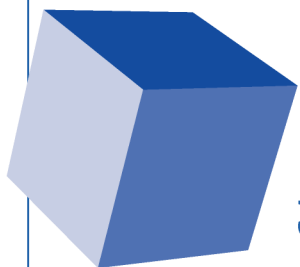
Um poliedro é uma região do espaço delimitada por uma união finita de polígonos (as faces) costurados de modo que cada par de faces, se se intersectam, fazem-no ao longo de uma aresta inteira ou de um vértice, e tal que o conjunto se pode deformar numa bola.

O leitor estará naturalmente a questionar-se se é possível obter neste caleidoscópio outros poliedros que não o cubo.



Simetria

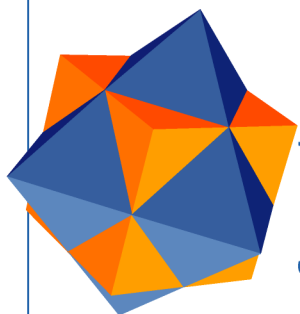
Alguns poliedros
que se podem ver
no caleidoscópio azul



Cubo



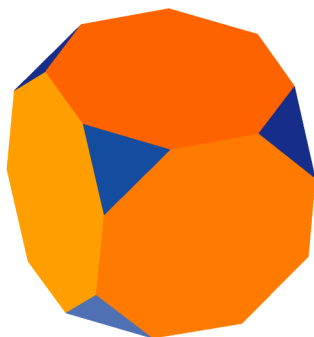
Octaedro



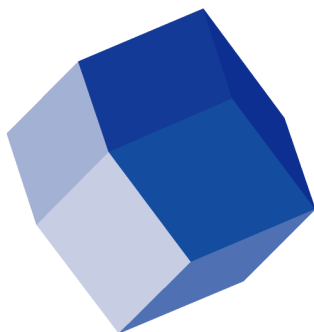
Composto de um
octaedro e de um cubo



3, 4, 4, 4



3, 8, 8



Dodecaedro Rômbico



Stella octangula



4, 6, 6

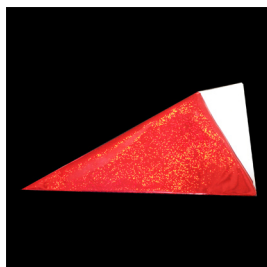


4, 6, 8

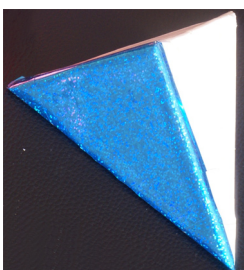
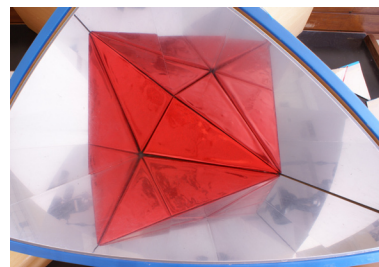


3, 4, 3, 4

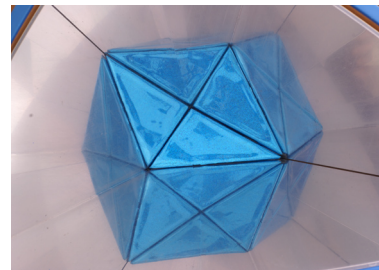
Aplicando o processo que já utilizámos - que se resume a intersectar o poliedro com todos os seus planos de simetria e isolar uma das partes - aos dois poliedros representados abaixo (octaedro e dodecaedro rômbico), fragmentamo-los também em 48 pirâmides iguais. Tal como o cubo, cada um deles pode ser reconstituído no caleidoscópio a partir de uma dessas pirâmides. Na realidade, este caleidoscópio permite produzir uma infinidade de poliedros diferentes. Ao lado estão listados os que se podem observar na exposição *Simetria, jogos de espelhos*. E nas duas páginas seguintes encontram-se fotografias de algumas dessas imagens.

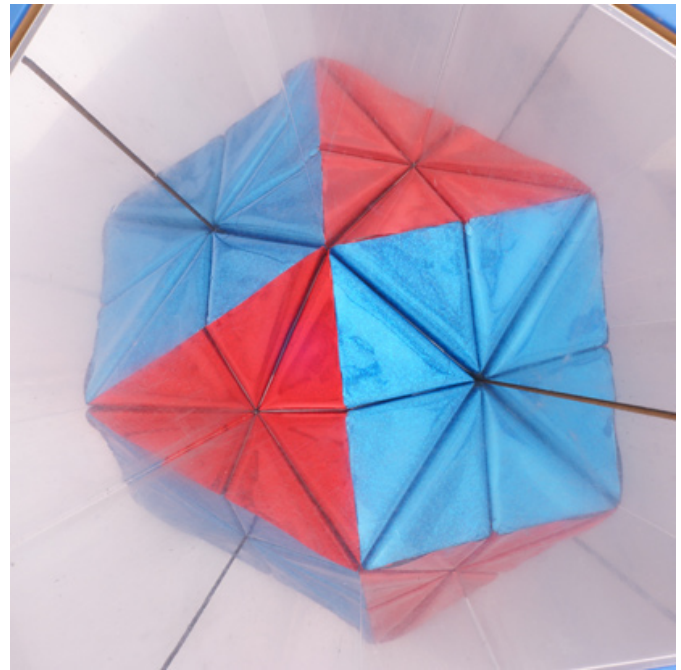
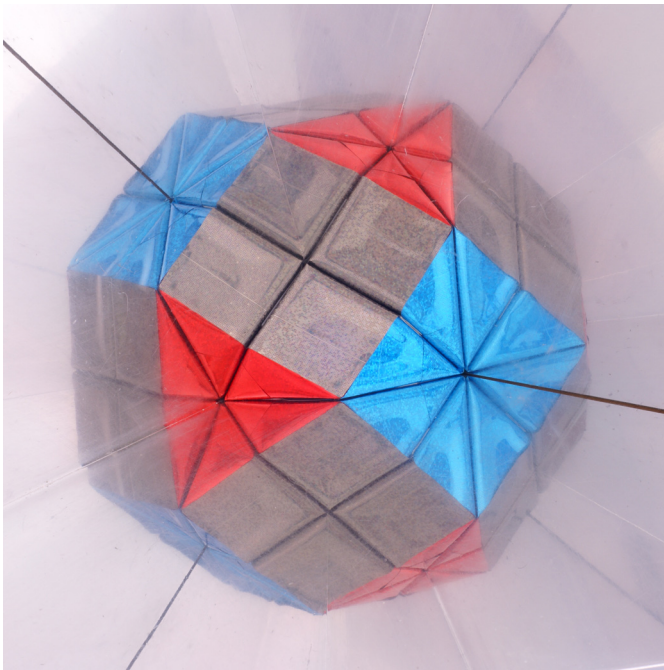


**Peça e imagem
do octaedro**

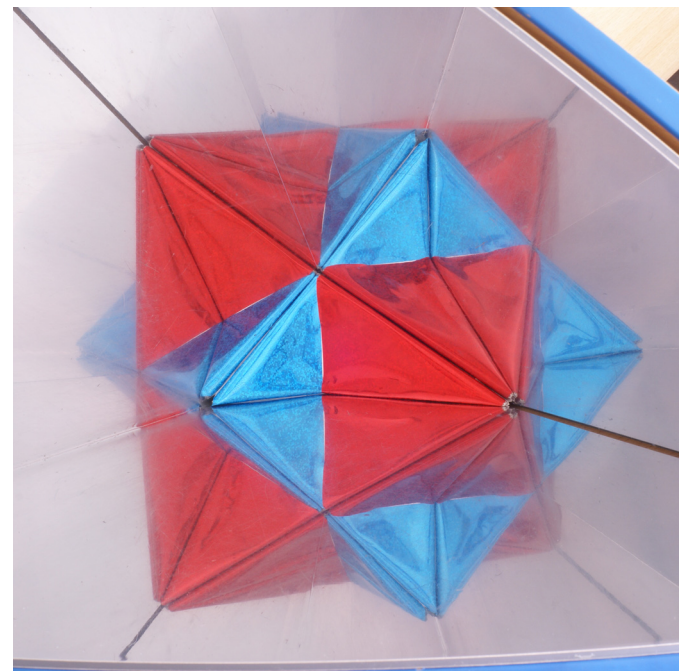
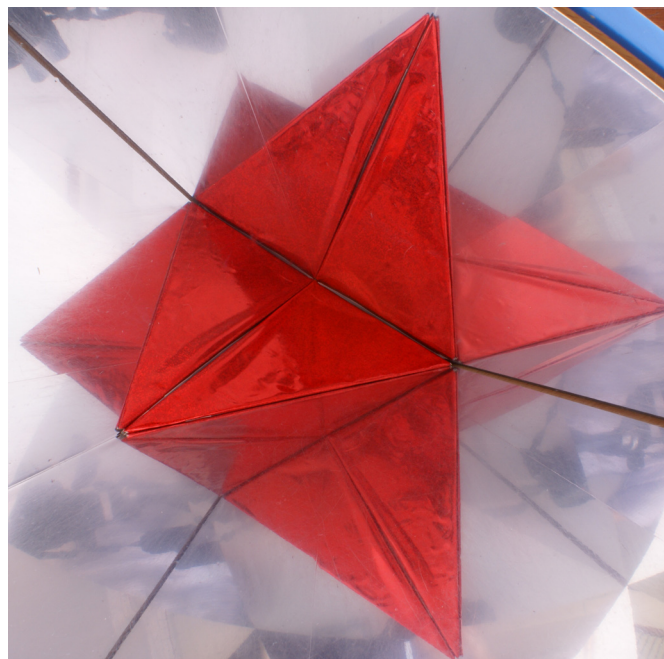


**Peça e imagem
do dodecaedro
rômbico**





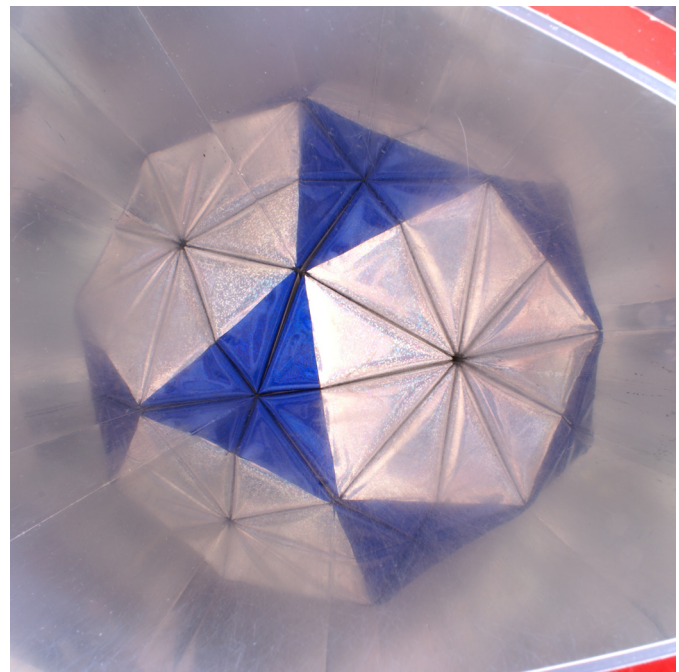
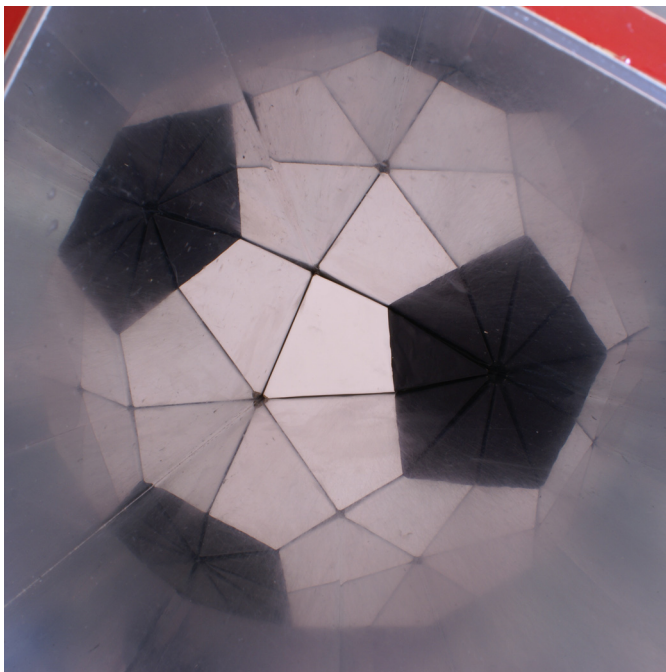
1.27



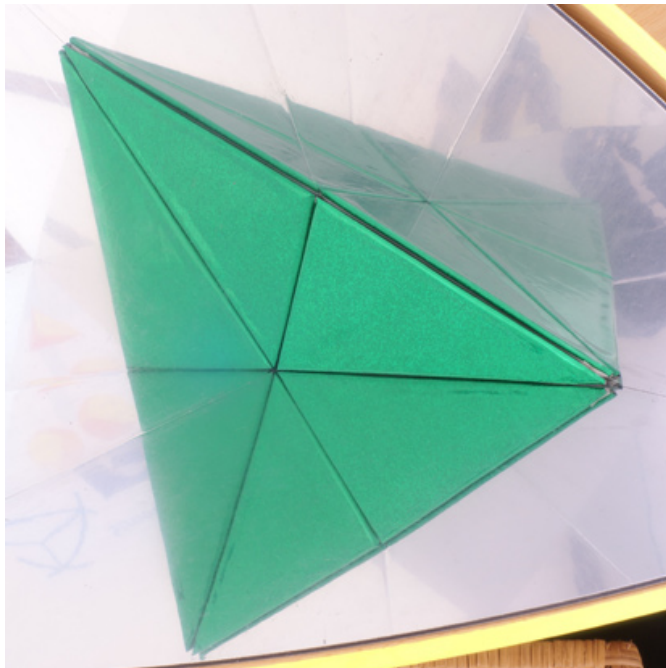
1.28

1.27 Dois poliedros construídos no caleidoscópio do cubo: o 3,4,4,4 e o 3,4,3,4.

1.28 Uma *stella octangula* e um composto de um cubo e de um octaedro construídos no caleidoscópio do cubo.



1.29



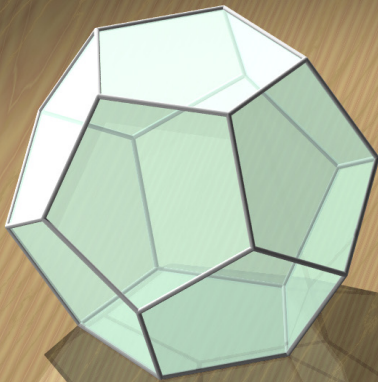
1.30

1.29 Dois poliedros obtidos num outro caleidoscópio que não o do cubo: o caleidoscópio do dodecaedro. Os poliedros designam-se por 5,6,6 (tem a estrutura de uma bola de futebol) e o 3,5,3,5.

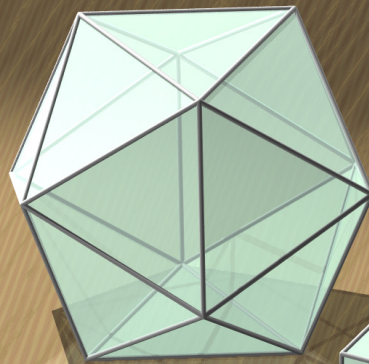
1.30 Dois poliedros obtidos num outro caleidoscópio que não o do cubo: o caleidoscópio tetraedro. Os poliedros designam-se por tetraedro e por 3,6,6.

Sólidos Platónicos

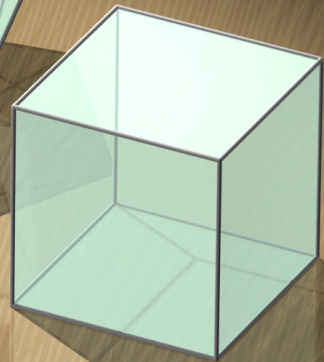
dodecaedro



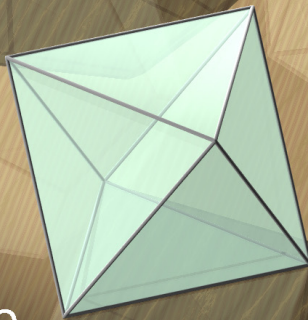
icosaedro



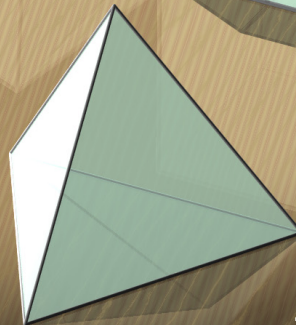
cubo



octaedro



tetraedro



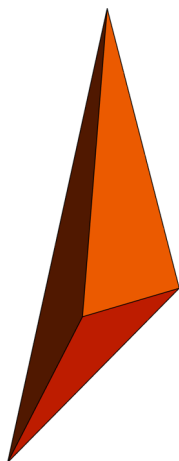


fig 1.31

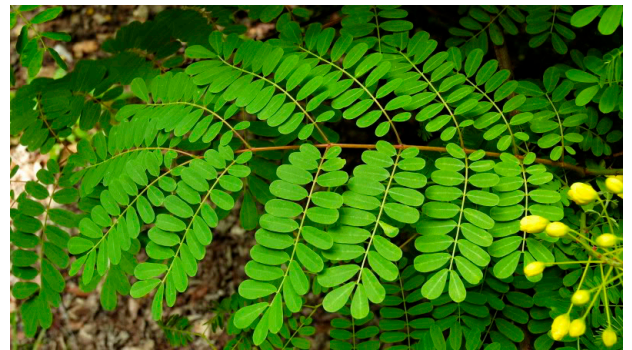
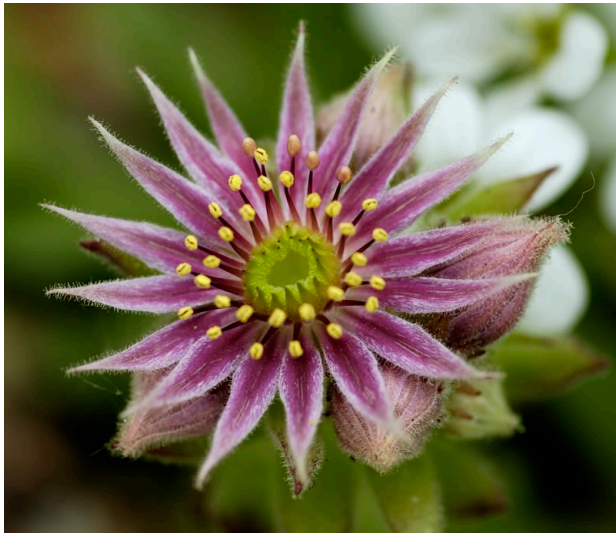
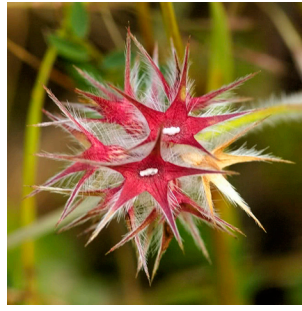
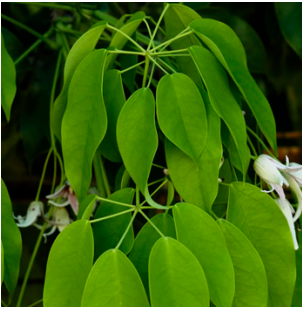
A lista de poliedros observáveis no caleidoscópio do cubo é afinal vasta. Mas será que é possível obter qualquer poliedro no caleidoscópio? Certamente que não. Existem poliedros que nem sequer possuem planos de simetria (fig 1.31), pelo que nunca poderiam ser observáveis num caleidoscópio, uma vez que um espelho introduz sempre um plano de simetria.

Até ao momento, o nosso estudo tem-se centrado no cubo. Mas porquê este destaque dado ao cubo? O cubo é o exemplo mais familiar de um tipo especial de poliedros: os sólidos platónicos.

De todos os poliedros convexos (ou seja, para cada par de pontos, o segmento que os une está contido no poliedro), há alguns que, desde a Antiguidade Grega, atraíram especial atenção pela sua extraordinária regularidade. Neste tipo de poliedros as faces, as arestas e os vértices são todos indistinguíveis: as faces são polígonos regulares iguais e em cada vértice encontra-se sempre o mesmo número de faces. O cubo apresenta claramente o perfil indicado. Surpreendentemente só existem mais quatro poliedros que verificam as condições descritas. Quanto ao número de faces, estes quatro poliedros têm quatro (em grego, *tetra*), oito (*okto*), doze (*dodeka*) e vinte (*eikosa*) faces, daí designarem-se por tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Repare agora o leitor que na exposição há mais dois caleidoscópios. Na verdade, cada um dos três caleidoscópios está associado a um sólido platónico, mais concretamente, ao cubo, ao tetraedro e ao dodecaedro. Mas, então, por que existem apenas três caleidoscópios?

Os caleidoscópios foram construídos por forma a produzirem os sólidos platónicos. Ora, havendo cinco sólidos platónicos, seria natural supor a existência de cinco caleidoscópios 3D - um por cada sólido platónico. A razão pela qual isso não se verifica prende-se com o facto de o octaedro ter a mesma simetria do cubo e o icosaedro a mesma simetria do dodecaedro. Mas o que significa dizer «ter a mesma simetria»?



Vivemos rodeados de simetria: na natureza, na arte, na arquitectura, nos objectos que usamos no dia-a-dia. E nem é preciso sairmos de casa para encontrarmos inúmeros exemplos de objectos com simetria: frutos, folhas de plantas, frisos de tapetes, padrões de tecidos, todos eles apresentam simetria, embora de diferentes tipos. Mas o que significa exactamente a palavra *simetria*?

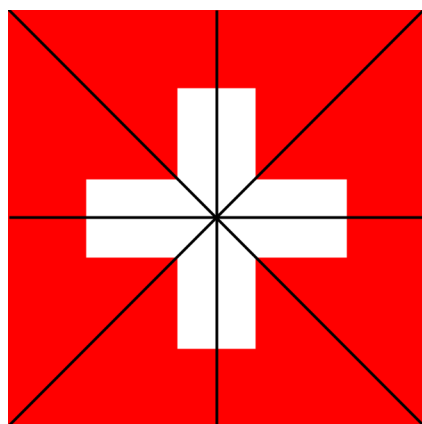


fig 1.33

Apercebemo-nos da existência de simetria sem que, por vezes, saibamos explicar de uma forma clara o que entendemos por ela. Detenhamo-nos na figura 1.33. Como podemos ver, existem quatro eixos de simetria. Será essa a razão para considerarmos a imagem "simétrica"?



fig 1.34

A ideia de simetria (numa figura plana) está frequentemente associada à existência de eixos de simetria. Mas se essa fosse a única via para descrever a simetria, o sinal representado na figura 1.34 não seria simétrico, já que claramente não apresenta eixos de simetria. Mas isso fere um pouco a nossa intuição - ele parece ter alguma espécie de simetria. É por isso conveniente procurar uma definição de simetria mais abrangente.

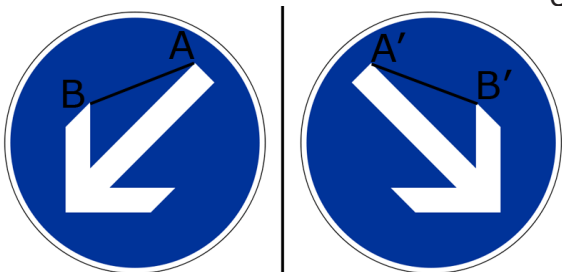
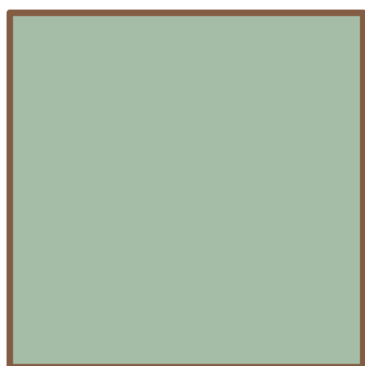
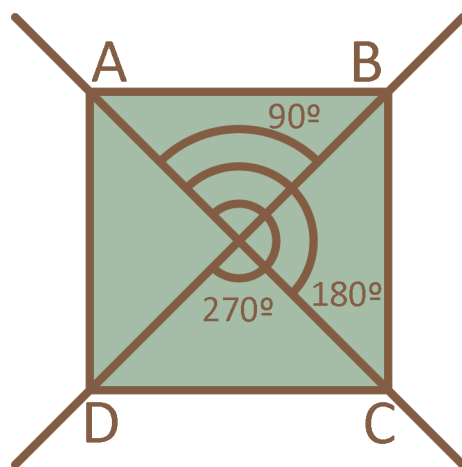


fig 1.35

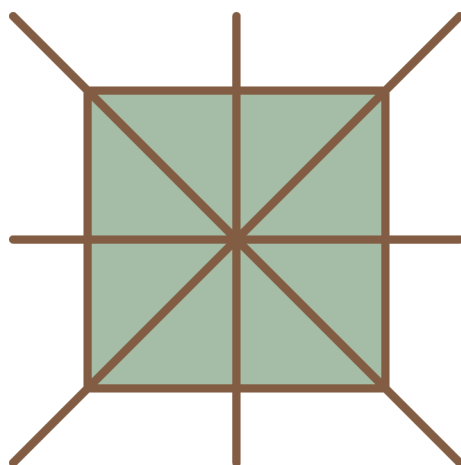
Afirmar que um desenho, como o da figura 1.35, tem um eixo de simetria equivale a afirmar que existe uma reflexão que leva a figura nela própria. A reflexão tem uma propriedade importante - ela preserva distâncias, isto é, dados dois pontos A e B quaisquer, a distância entre A e B é igual à distância entre A' e B', sendo A' e B' as imagens de A e B por essa reflexão. (Qualquer função que satisfaça esta propriedade designa-se por *isometria*.)



1.36

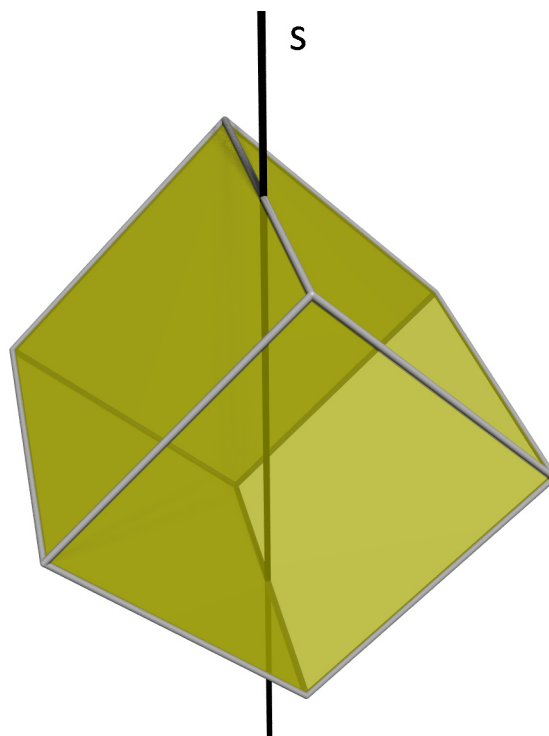


1.37



1.38

1.39 A recta s passa pelos pontos médios de duas arestas diametralmente opostas. Existem duas simetrias de rotação do cubo com eixo s : de 0° (identidade) e de 180° .



1.39

Uma simetria de uma figura é uma isometria que deixa a figura *invariante*. É preciso especial cuidado com o significado a atribuir à palavra invariante - não pretendemos que cada ponto seja levado nele mesmo, mas sim que cada ponto seja levado noutro (que pode ou não ser diferente), de tal forma que a figura toda seja transformada em si mesma. Exemplifiquemos com uma figura simples - um quadrado. Quais são as suas simetrias?

Uma rotação é um exemplo de uma isometria. Haverá alguma rotação que seja uma simetria do quadrado? Certamente que sim, mais do que uma, aliás. Se considerarmos uma rotação em torno do centro do quadrado (fig 1.37), para que o quadrado fique invariante, qualquer vértice, por exemplo A, deverá ser levado num vértice: em B, em C, em D ou em si mesmo. Determinámos, assim, as rotações que são simetrias do quadrado.

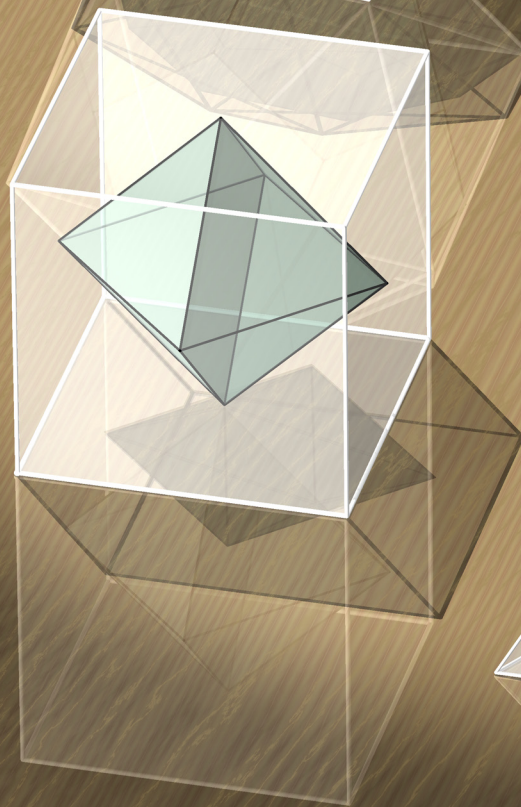
E haverá simetrias de reflexão? O quadrado tem quatro eixos de simetria (fig 1.38). As reflexões que deixam o quadrado invariante são por isso exactamente as reflexões nos seus eixos de simetria.

Já encontrámos todas as simetrias de rotação e de reflexão do quadrado. Haverá mais simetrias para além destas? É um facto conhecido que, no plano, só existem dois tipos de isometrias que podem ser simetrias de uma figura limitada - as rotações e as reflexões. Concluimos, assim, que as simetrias do quadrado são exactamente as oito já descobertas.

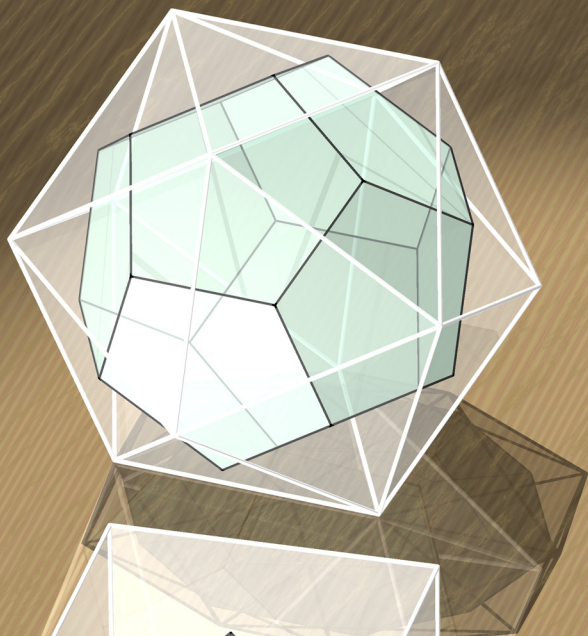
E se passarmos ao caso tridimensional análogo - o cubo? Quais serão as suas simetrias?

Tal como no caso do quadrado, o cubo tem simetrias de rotação (24) - dois exemplos dessas simetrias estão indicados na figura 1.39. Quanto às simetrias de reflexão, vimos já que o cubo tem 9 planos de simetria, pelo que tem 9 simetrias de reflexão.

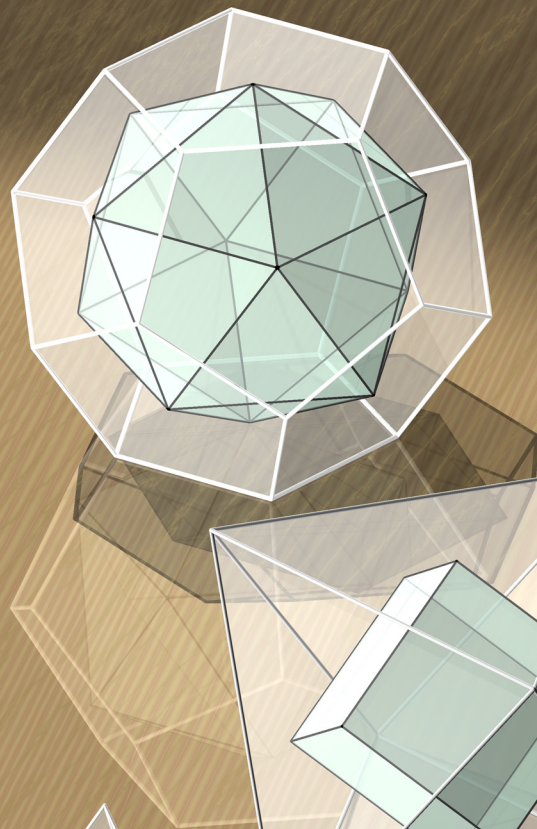
A



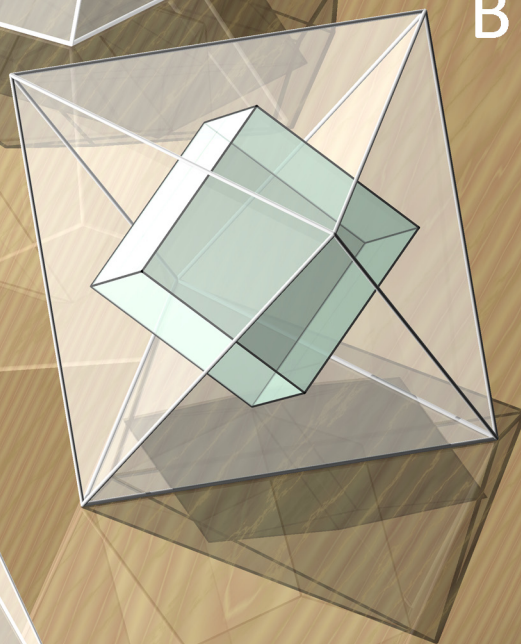
D



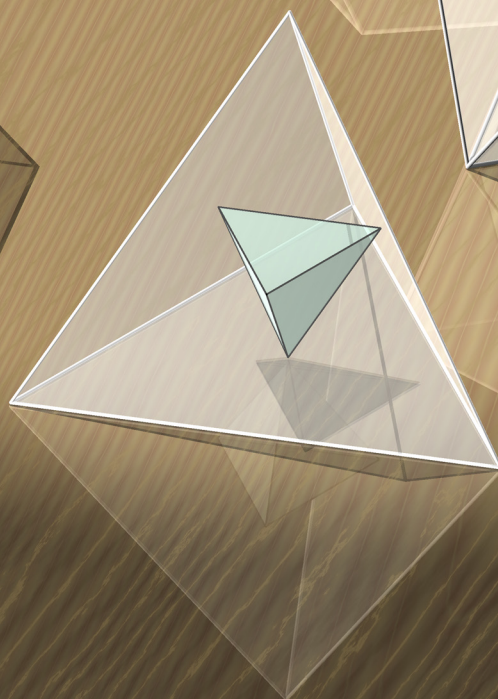
C



B



E



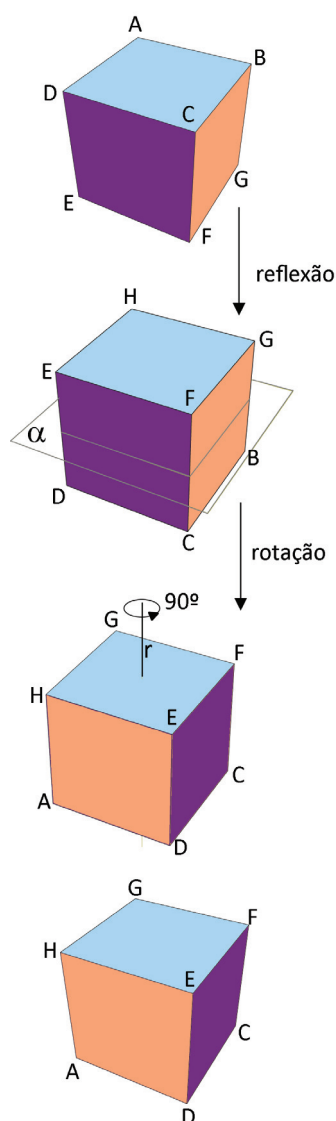


fig. 1.40

Serão as rotações e as reflexões as únicas simetrias do cubo? Por analogia com o caso do quadrado, inclinar-nos-íamos para uma resposta afirmativa. No entanto, no espaço, existe uma terceira isometria distinta da rotação e da reflexão que pode ser simetria de uma figura limitada – a reflexão rodada.

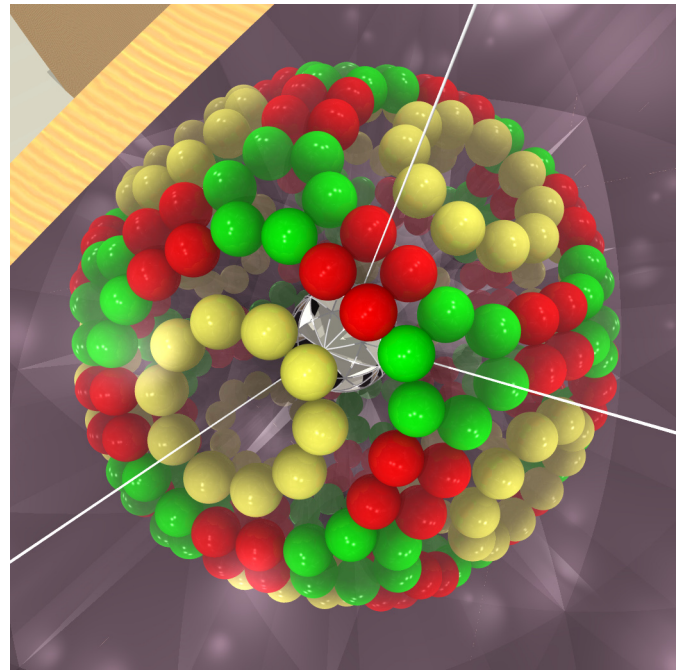
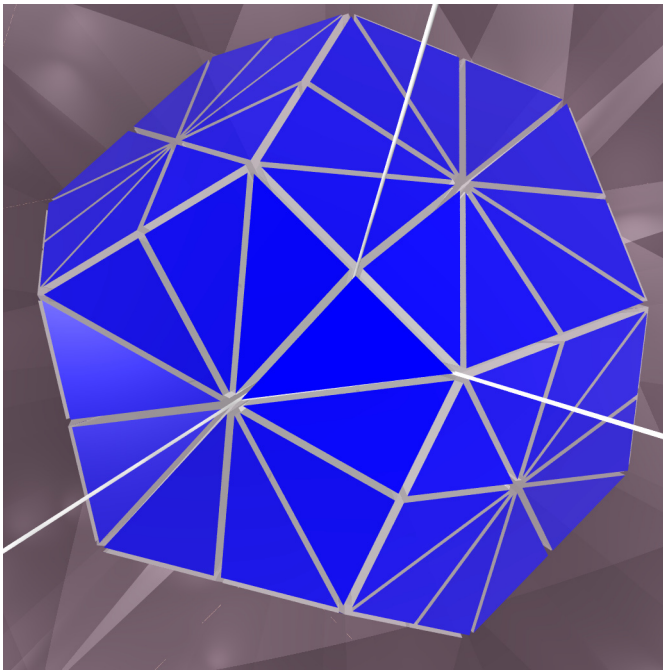
Uma reflexão rodada obtém-se efectuando uma reflexão num plano α seguida de uma rotação (distinta da identidade) num eixo r perpendicular a α (fig 1.40). E o exemplo indicado na figura ao lado é uma das (15) reflexões rodadas que são simetrias do cubo.

Poderíamos agora compor, por exemplo, uma rotação (de ângulo diferente de 0) com uma reflexão rodada. O resultado é uma nova simetria do cubo. Contudo a composição de duas quaisquer simetrias do cubo ou é uma rotação ou uma reflexão ou uma reflexão rodada.

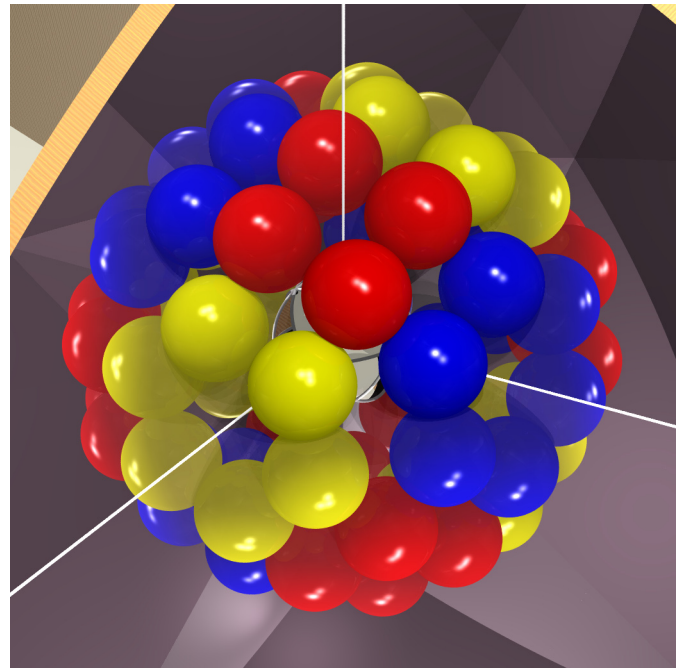
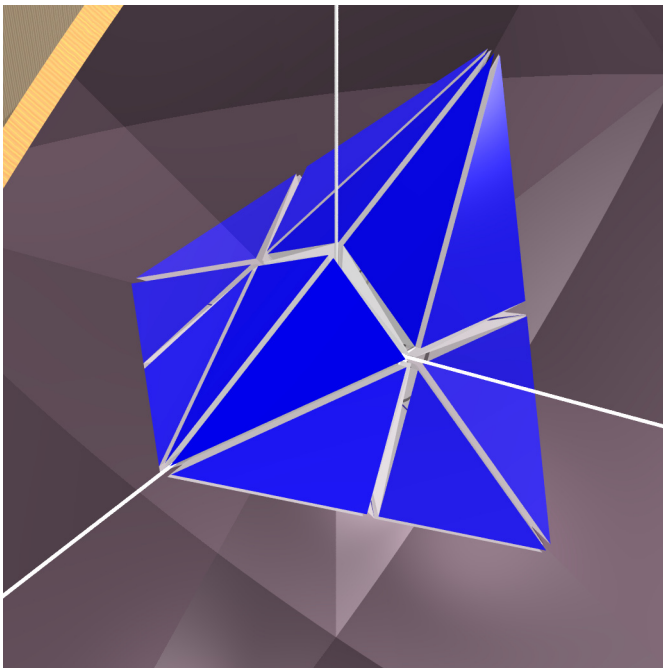
Para uma descrição exhaustiva das simetrias do cubo, aconselhamos a leitura da referência [V].

De entre os sólidos platónicos existentes, o cubo tem uma relação especial com um deles - o octaedro. Esta relação pode ser posta em evidência em diferentes aspectos. A nível numérico, se contarmos o número de vértices, arestas e faces dos dois poliedros constatamos que ambos têm o mesmo número de arestas (12) e o número de vértices de um é igual ao número de faces do outro. Esta relação numérica é consequência de uma outra ainda mais surpreendente: se partirmos de um cubo e unirmos por um segmento os centros de faces contíguas, obtemos um octaedro (A, página ao lado). Reciprocamente, e pelo mesmo processo, obtemos um cubo a partir de um octaedro (B).

Analogamente, podemos construir um icosaedro partindo de um dodecaedro e vice-versa (C e D). E o que se passa no caso do tetraedro? Partindo de um tetraedro, obtemos um novo tetraedro.



1.41



1.42

1.41 Caleidoscópio do dodecaedro onde se colocaram, respectivamente, a peça geradora do dodecaedro e três bolinhas.

1.42 Caleidoscópio do tetraedro onde se colocaram, respectivamente, a peça geradora do tetraedro e três bolinhas.

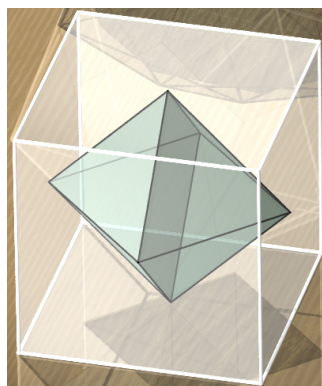


fig 1.43

Aprofundemos agora o nosso estudo das relações cubo/octaedro, com o apoio da figura 1.43. Uma qualquer simetria do cubo, por preservar os vértices e as distâncias, deixa invariante os centros das suas faces, o que equivale a afirmar que deixa invariante os vértices do octaedro e, consequentemente, leva o octaedro em si mesmo. Portanto, na fig 1.43, qualquer simetria do cubo é também simetria do octaedro. E, por um raciocínio análogo, concluímos que qualquer simetria do octaedro é também simetria do cubo. O cubo e o

octaedro partilham, portanto, as mesmas simetrias.

Mas, e se o cubo e o octaedro não estiverem nas posições acima indicadas? O que é que acontece, por exemplo, se eles não tiverem o mesmo centro? Decididamente não têm as mesmas simetrias. Mas prova-se que é possível estabelecer uma “equivalência” entre as simetrias de um e do outro.

Tudo o que foi dito sobre o par cubo/octaedro, que parecem privilegiados até ao momento, pode ser adaptado aos restantes sólidos platónicos: também no caso dodecaedro/icosaedro é possível construir um poliedro a partir do outro e, por analogia com o caso anteriormente tratado, conclui-se que o dodecaedro e o icosaedro partilham as mesmas simetrias.

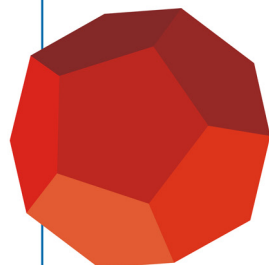
Na secção anterior, vimos como determinar a forma da peça do cubo e a forma do próprio caleidoscópio. Como determinar a forma do caleidoscópio do dodecaedro? E do tetraedro? Qual o ângulo entre os espelhos nesses dois casos? As imagens ao lado sugerem a resposta.

E que poliedros é possível visualizar nestes caleidoscópios? Tal como no caso do cubo, os restantes caleidoscópios permitem gerar uma infinidade de poliedros diferentes. As duas páginas que se seguem apresentam a listagem de todos os poliedros que é possível obter na exposição “Simetria, jogos de espelhos”. Fotografias de alguns poliedros observáveis nos caleidoscópios foram já exibidas anteriormente.

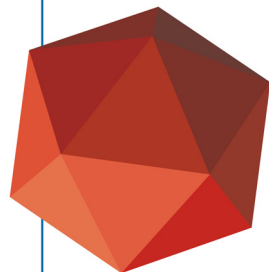


Simetria

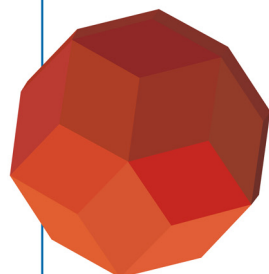
Alguns poliedros
que se podem ver
no caleidoscópio vermelho



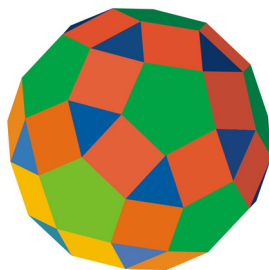
Dodecaedro



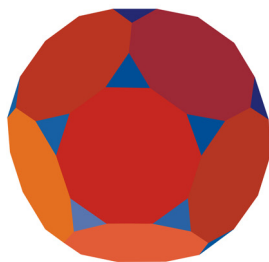
Icosaedro



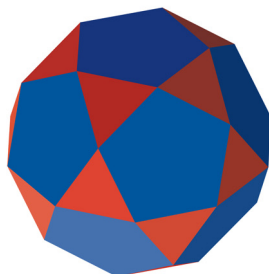
Triacotaedro rômico



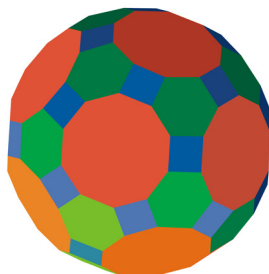
3, 4, 5, 4



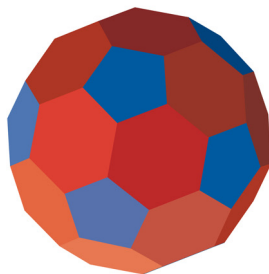
3, 10, 10



3, 5, 3, 5



4, 6, 10



5, 6, 6



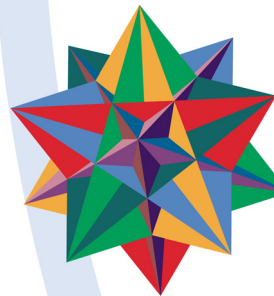
Grande dodecaedro estrelado



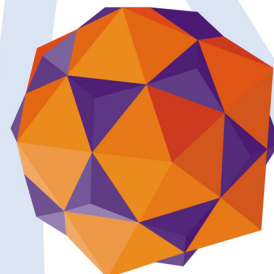
Pequeno dodecaedro estrelado



Grande dodecaedro



Grande icsaetro

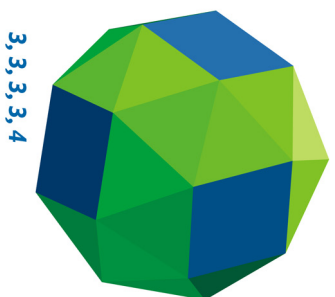


Composto de um dodecaedro
e de um icsaetro

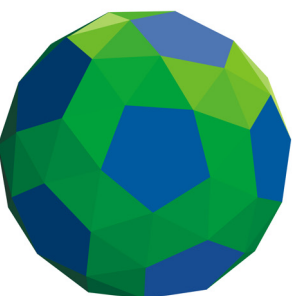


Simetria

Alguns poliedros que não se podem ver num caleidoscópio



3, 3, 3, 3, 4



3, 3, 3, 3, 5



Alguns poliedros que se podem ver no caleidoscópio amarelo

Tetraedro

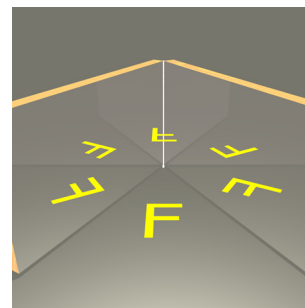
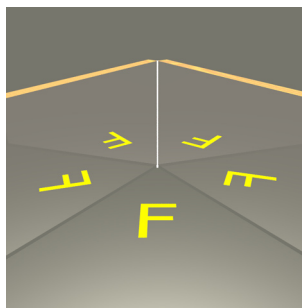
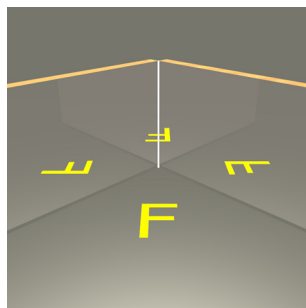
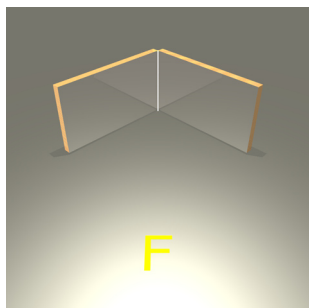


3, 6, 6



Stella octangula

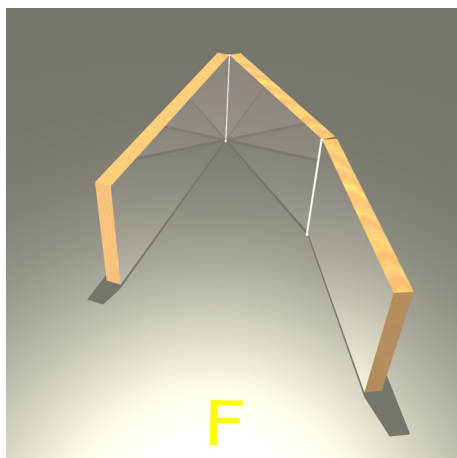




1.46

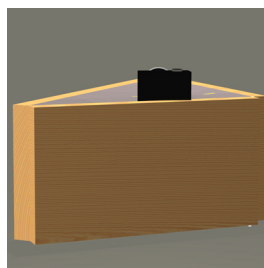
1.46 As três figuras da direita apresentam a imagem que resulta de colocar os espelhos fazendo entre si um ângulo de, respectivamente, 90° ($=360^\circ/4$), 72° ($=360^\circ/5$) e 60° ($=360^\circ/6$).

1.47 Construiu-se uma caixa triangular de espelhos.

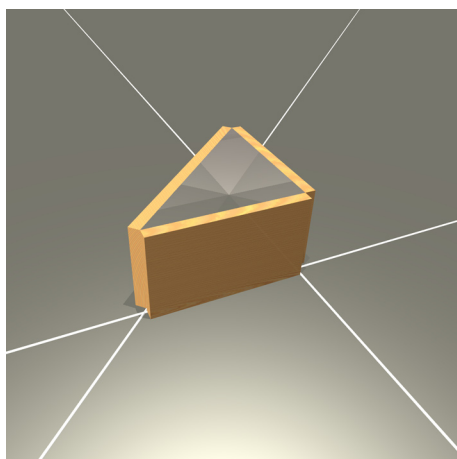
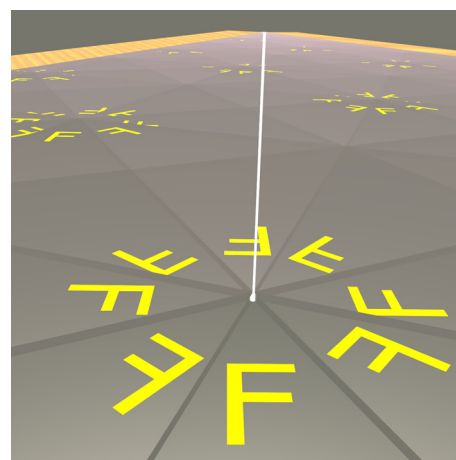


1.47

1.48 Dentro do prisma de espelhos, com ângulos de 90° , 45° e 45° , colocou-se uma máquina fotográfica (virtual) no topo de uma das faces. A imagem registada pela máquina fotográfica está representada na figura da direita.



1.48



1.49 Consideremos as três rectas que contêm as arestas da base do prisma.

1.49

E se fechássemos o caleidoscópio do cubo? O que veríamos se acrescentássemos um quarto espelho, fechando o caleidoscópio?

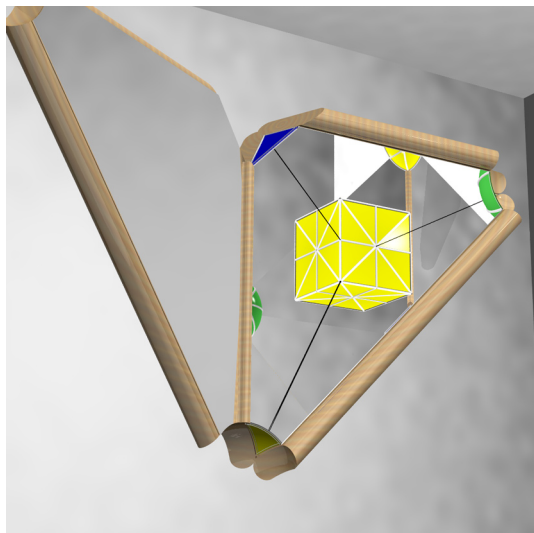
Tecnicamente trata-se de uma questão de difícil resolução: precisávamos de estar dentro do caleidoscópio para ver o que se passa! Mas virtualmente a resposta pode ser bem mais fácil.

Começemos por uma questão mais simples - o caso do plano: colocando dois espelhos de maneira a formarem entre si um ângulo de $360^\circ/n$, para algum número natural n , e inserindo uma figura entre eles, gera-se um número finito de imagens - n imagens (fig 1.46). Contudo, se acrescentarmos um terceiro espelho (fig 1.47), criando um prisma sem bases, e ajustarmos os espelhos de maneira a todos os ângulos entre as faces serem da forma $360^\circ/k$ (para algum k natural), a imagem reproduz um desenho infinito (fig 1.48). Isto resulta do facto de ser infinito o esquema de simetria gerado pelas reflexões nas três rectas que contêm as arestas da base do prisma (fig 1.49).

Uma situação análoga ocorre no espaço: os três caleidoscópios aqui apresentados, que correspondem a pirâmides sem base, geram um número finito de imagens. Inserindo, adequadamente, um quarto espelho, é possível passar para um esquema de simetria infinito.

Nas páginas que se seguem é dada uma resposta (visual) à questão levantada no início desta página. Os quatro vértices do caleidoscópio foram seccionados, por forma a permitirem-nos visualizar um cubo, duas esferas e uma bipirâmide hexagonal.

Os esquemas de simetria associados a estes caleidoscópios são bem mais complexos do que os apresentados para o quadrado ou para o cubo. Para o leitor motivado, sugerimos a consulta da referência [BCG].

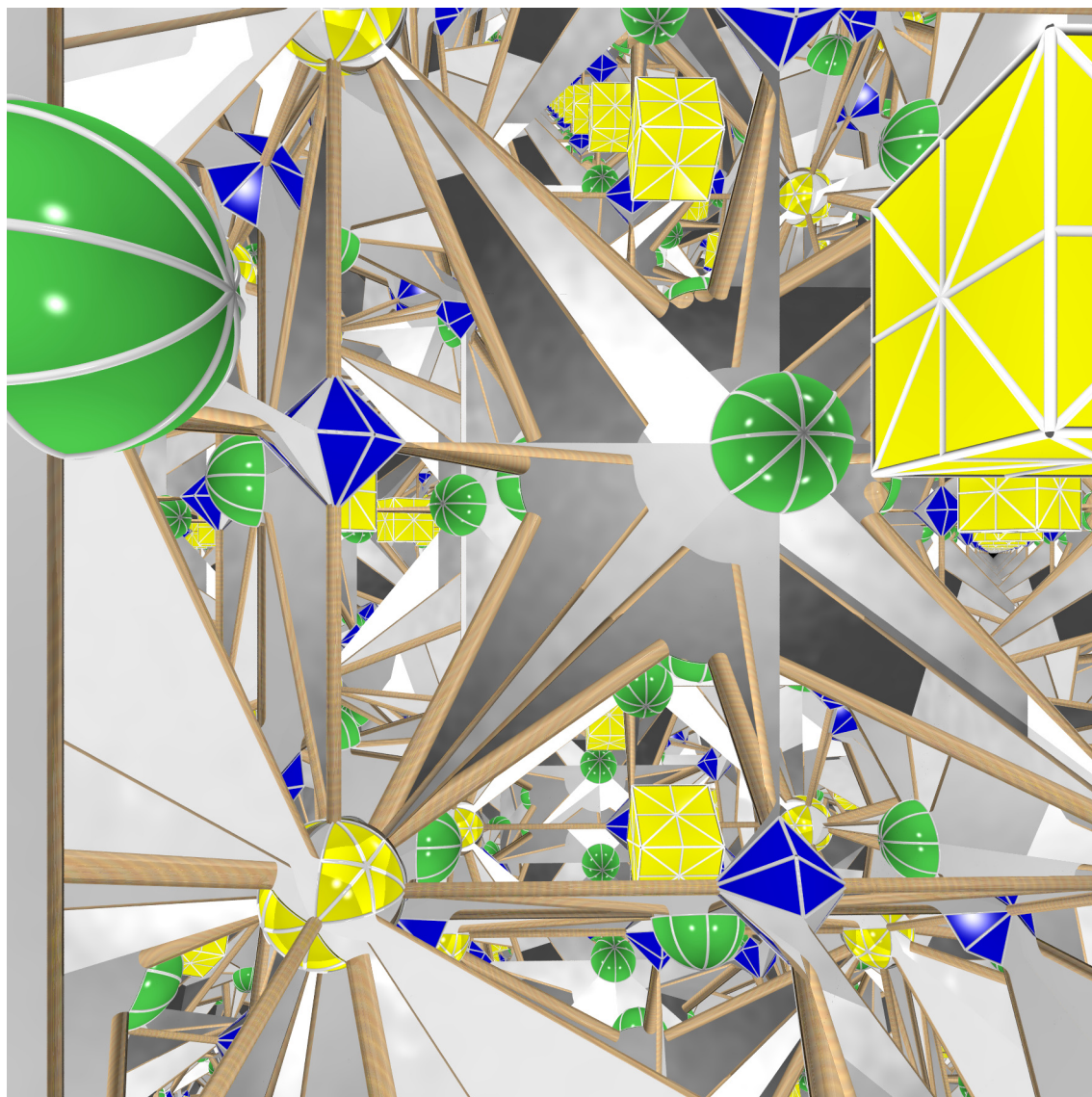


1.50 Caleidoscópio do cubo ao qual foi acrescentado um quarto espelho.

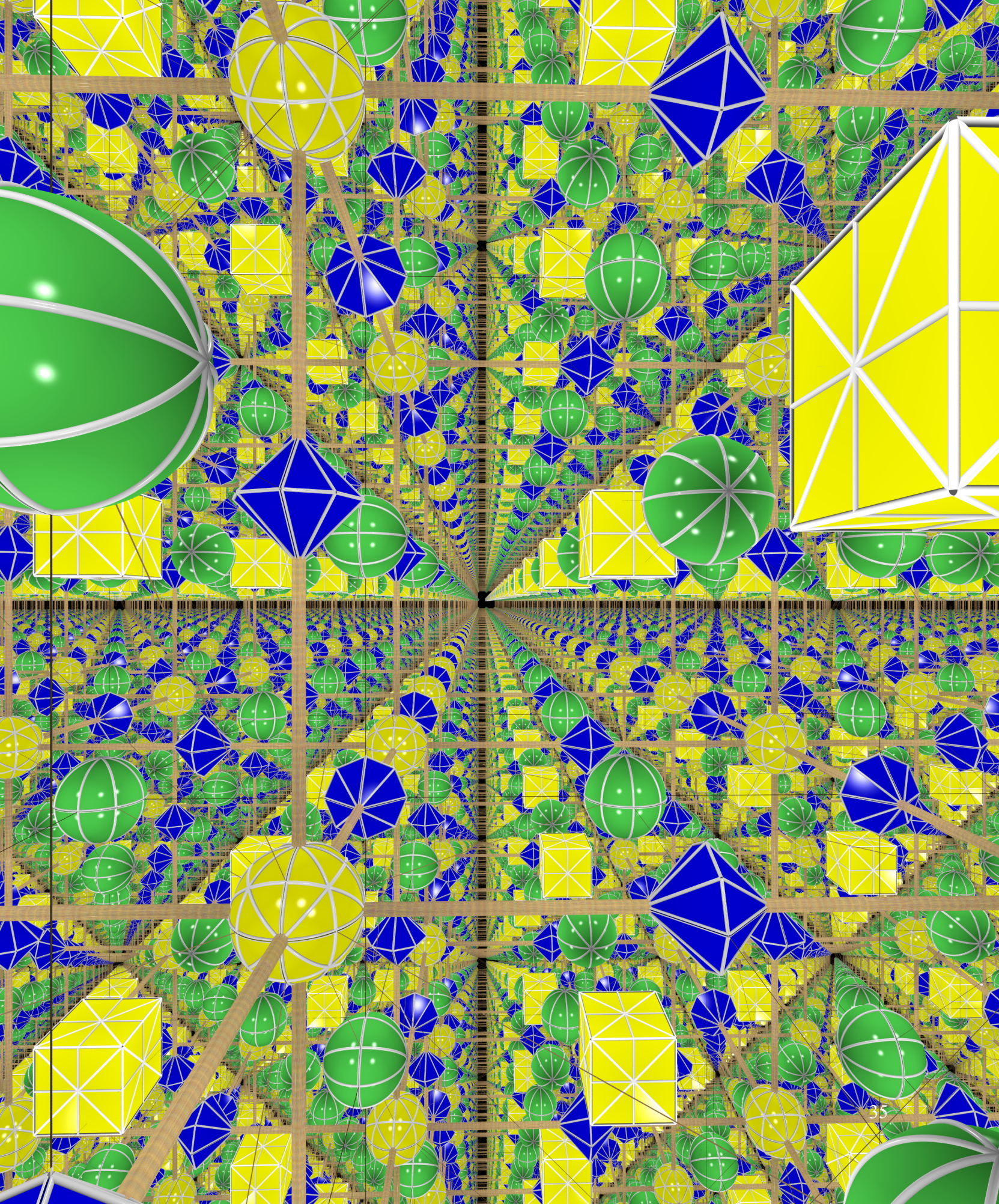
1.51 A imagem mostra o interior do caleidoscópio quando a tampa se encontra semi-aberta.

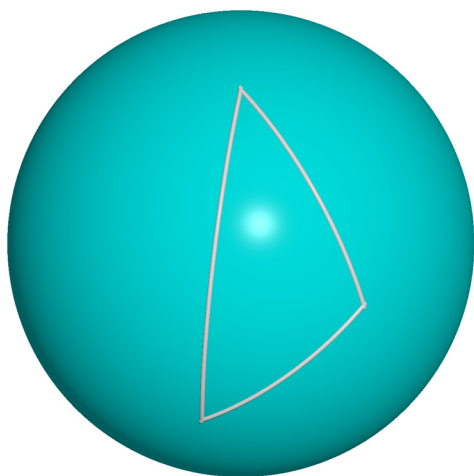
A figura da página seguinte mostra o que se pode ver dentro do caleidoscópio quando ele está completamente fechado.

1.50

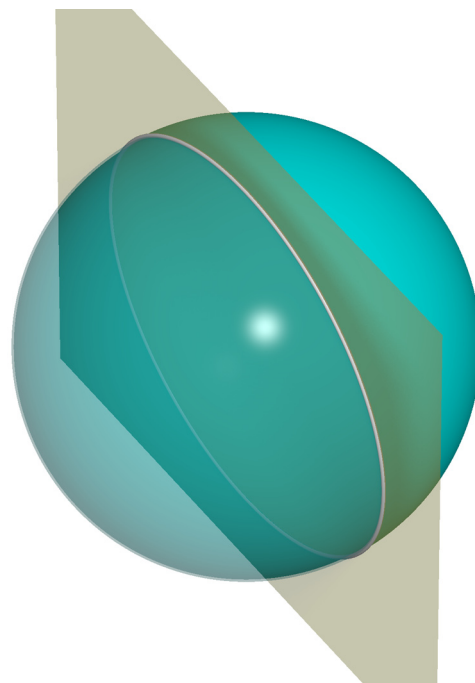


1.51

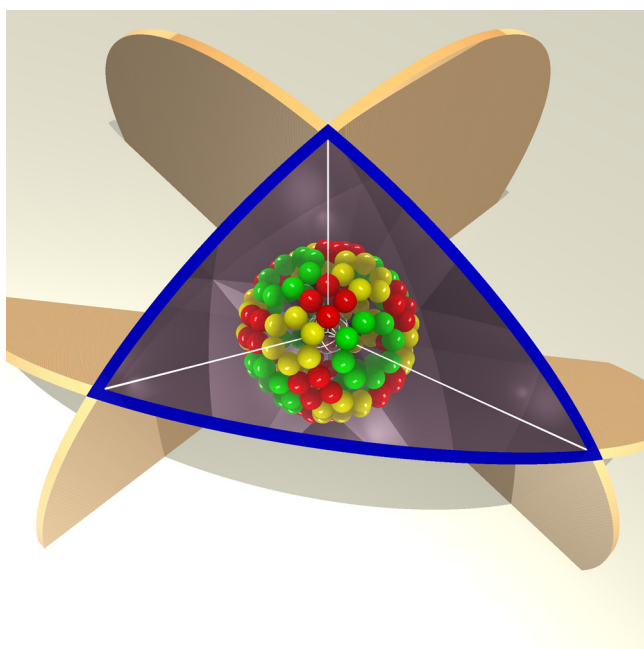




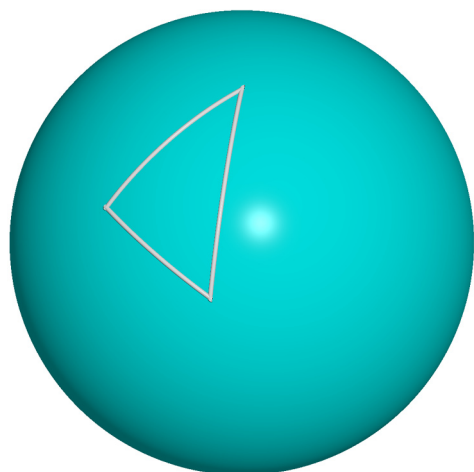
1.52



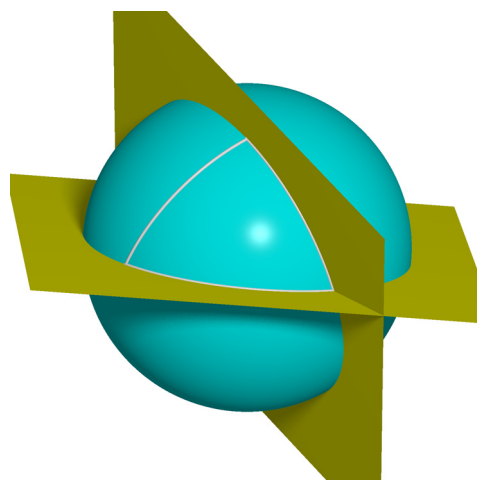
1.53



1.54



1.55



1.56

- 1.52 Um triângulo numa esfera.
- 1.53 Arco de círculo máximo.
- 1.54 A imagem apresentada ao lado corresponde ao caleidoscópio do cubo quando lá são colocadas três bolas.
- 1.55 O triângulo esférico apresentado corresponde ao triângulo a azul do caleidoscópio do cubo (fig 1.53).
- 1.56 Os lados de um triângulo esférico são arcos de círculo máximo.

Para saber mais

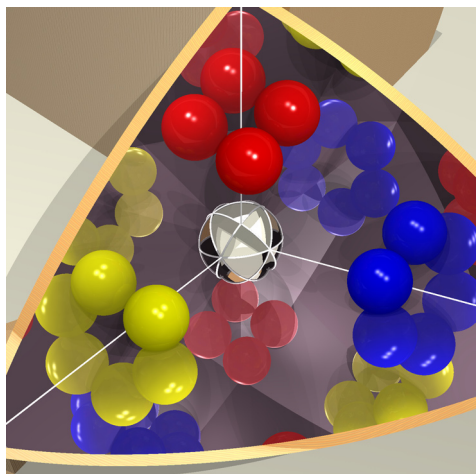
Geometria Esférica

Uma das primeiras tarefas que nos propusemos realizar no início deste capítulo foi a de calcular as amplitudes dos ângulos entre os espelhos do caleidoscópio do cubo. Determinámo-las então, experimentalmente, e, posteriormente, confirmámos os valores obtidos, recorrendo para isso ao facto do triedro de espelhos (do caleidoscópio) corresponder à fracção $1/48$ de um cubo.

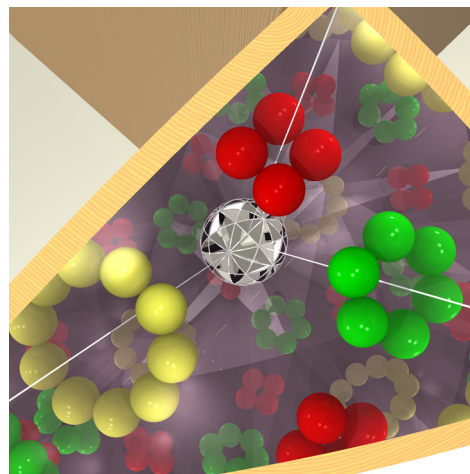
Recorde-se que os valores obtidos para as amplitudes foram: 45° , 60° e 90° . Ora, a soma $45^\circ + 60^\circ + 90^\circ$ ($=195^\circ$) é superior a 180° , o que aparentemente infringe um dos resultados mais conhecidos da Geometria Euclidiana, que afirma que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° . O que se passa é que não estamos perante um triângulo no plano, mas sim um triângulo numa esfera (fig 1.52). Assim, o tipo de Geometria que aqui intervém não é aquela a que estamos geralmente habituados - a Geometria euclideana - mas a Geometria esférica.

Quais as semelhanças e diferenças entre estas duas Geometrias?

Um dos conceitos fulcrais na Geometria Euclideana é o de recta, a curva que minimiza a distância entre dois quaisquer dos seus pontos. Contudo, uma esfera não contém rectas nem segmentos de recta, pelo que, na Geometria esférica, as rectas são substituídas por uma outra entidade - os círculos máximos. Um círculo máximo é uma circunferência resultante da intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro (fig 1.53) e tem a propriedade descrita acima para uma recta do plano. Com esta alteração, estamos novamente habilitados a definir triângulos, cujos lados são agora feitos com arcos de círculos máximos, como, por exemplo, os três arcos representados a azul na figura 1.54, que formam um triângulo esférico (1.55).



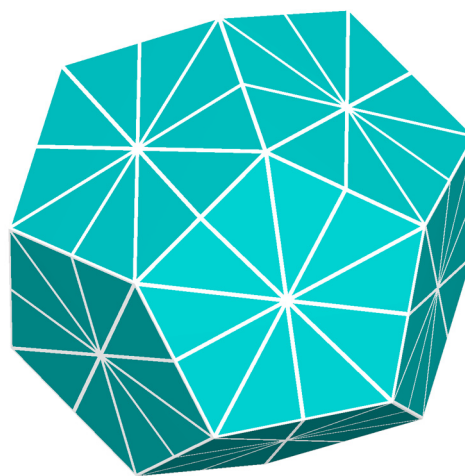
1.57



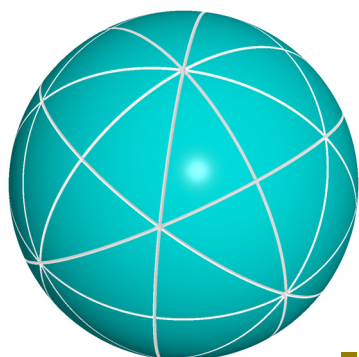
1.58



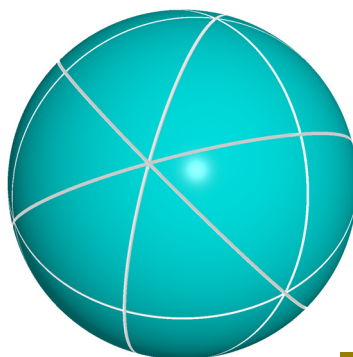
1.59



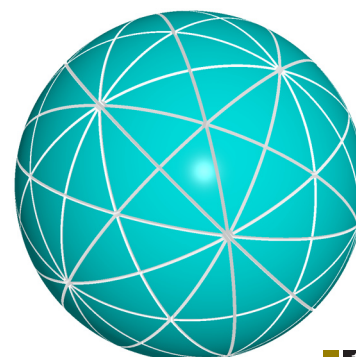
1.60



1.61



1.62



1.63

Note-se que cada círculo máximo está associado a um plano que passa pelo centro da esfera. Por definição, o ângulo entre dois círculos máximos é igual à amplitude do ângulo (diedral) compreendido entre os planos que lhes estão associados (fig 1.56).

Ora, o que verificámos anteriormente é que a soma das amplitudes dos ângulos deste triângulo é superior a 180° . Será que é sempre 195° ?

Apelemos à informação que os caleidoscópios do tetraedro e do dodecaedro nos dão. Observando as imagens 1.57 e 1.58, e procedendo como anteriormente, concluímos que as amplitudes dos ângulos entre os espelhos do caleidoscópio do tetraedro (fig 1.57) são 90° , 60° , 60° , cuja soma é 210° . No caso do dodecaedro (fig 1.58), as amplitudes são 90° , 60° , 36° , o que perfaz uma soma de 186° . Uma primeira conclusão que podemos retirar daqui é que, ao contrário do que se passa na Geometria Euclideana, na Geometria esférica não há um valor fixo para a soma das amplitudes dos ângulos de um triângulo.

Observe-se agora que, da mesma forma que o caleidoscópio do cubo corresponde a $1/48$ do cubo, o do tetraedro corresponde a $1/24$ do tetraedro (fig 1.59) e o do dodecaedro a $1/120$ (fig 1.60). Para cada um dos três poliedros, consideremos a esfera que o circunscreve e a projecção nessa esfera dos triângulos em que está subdividido o mesmo poliedro (figs 1.61, 1.62 e 1.63). Obtém-se assim uma partição da esfera em 48, 24 ou 120 triângulos iguais, conforme o caleidoscópio. E repare-se que, dos três casos apresentados, que quanto maior é a área do triângulo, maior é a soma das amplitudes dos ângulos. Haverá, em geral, uma relação directa entre estas duas grandezas?

Designemos por *excesso angular* de um triângulo o quanto a soma das amplitudes dos ângulos ultrapassa o ângulo raso e sistematizemos os resultados até agora obtidos.

No caso do tetraedro, o excesso angular é 30° ($210^\circ - 180^\circ$) e a área do triângulo é $1/24$ da área da esfera. Já para o cubo, o excesso angular é 15° e a área do triângulo é $1/48$ da área da esfera. Por fim, no caso do dodecaedro, o excesso angular é de 6° e a área $1/120$ da área da esfera. E observe-se que

$$6:(1/120)=15:(1/48)=30:(1/24)=720.$$

As duas grandezas consideradas são, pois, directamente proporcionais.

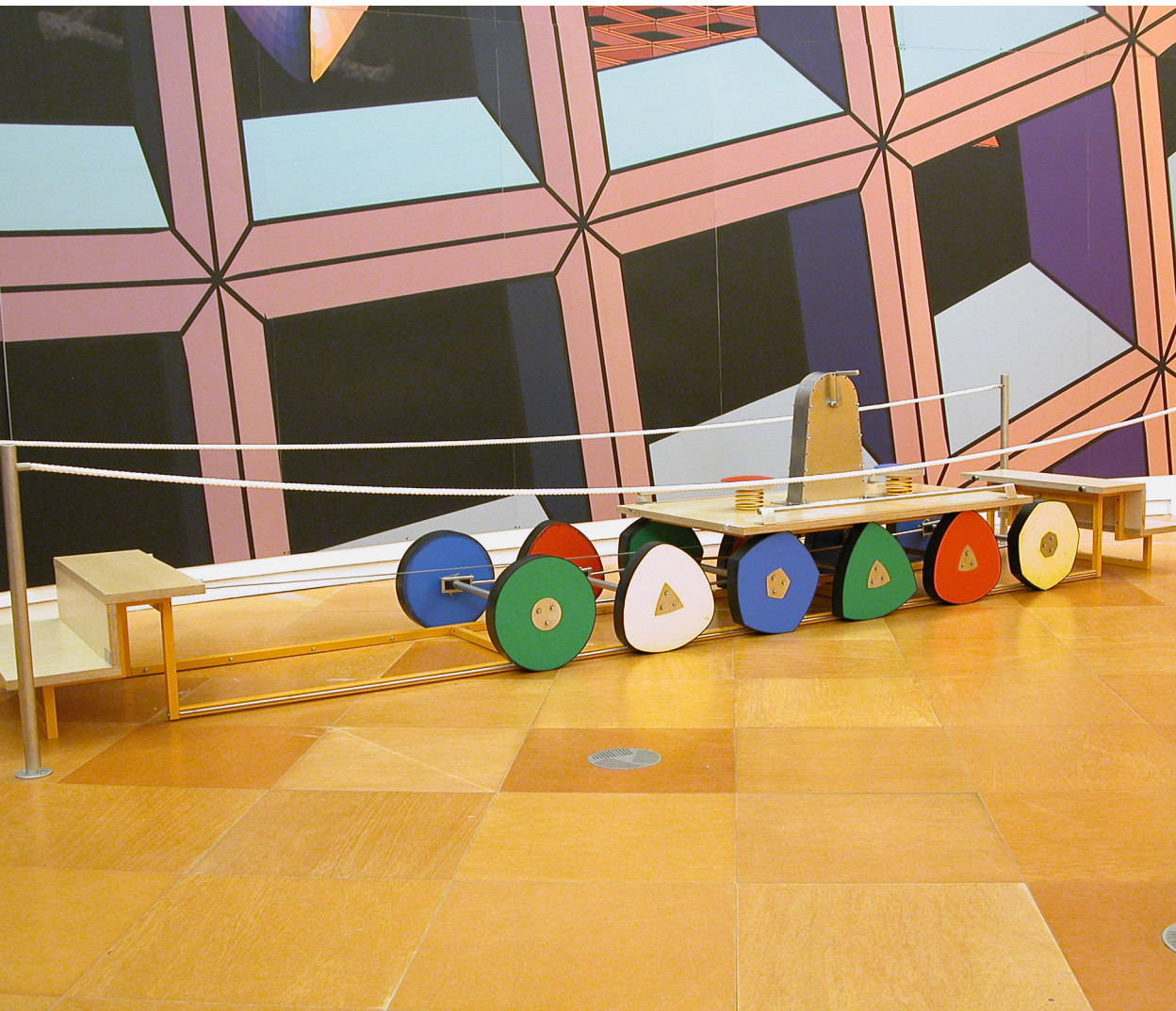
Na realidade, o resultado anterior não é apenas válido para os três casos particulares estudados: pode provar-se que a área de qualquer triângulo esférico é directamente proporcional ao excesso angular:

$$\text{Área} = r^2 (\text{excesso angular}),$$

onde r é o raio da esfera.

Deste último resultado advém uma consequência importante: contrariamente à Geometria Euclideana, na Geometria esférica o conceito de semelhança reduz-se à noção de congruência, uma vez que as noções de tamanho e forma não são independentes.

02 À volta da roda



Secções

O que é uma circunferência?

A Matemática do futebol

Rodas de largura constante

Para saber mais

O que é uma circunferência?

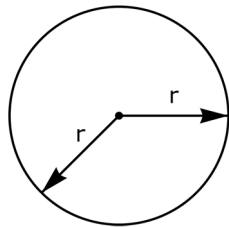


fig 2.1

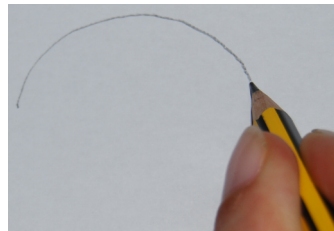


fig 2.2

Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que se encontram à mesma distância de um dado ponto, dito centro. E há um instrumento, o compasso, que a desenha: uma perna mantém-se fixa enquanto a outra traça a curva. No entanto, para desenhar uma circunferência sem recurso a qualquer instrumento, a maior parte de nós não o faz imitando o movimento de um compasso: tentando obter uma curva fechada, rodamos o lápis sempre no mesmo sentido (fig 2.2) e mantemos a mão firme para que a curva traçada tenha certa forma; intuitivamente, temos, pois, a noção de que há outras propriedades que a circunferência satisfaz, para as quais o que interessa é o aspecto da curva e não os relacionados com distâncias.

Em analogia com a nossa vida quotidiana, pensemos na trajectória de um carro quando se roda o volante: se não efectuarmos qualquer movimento, o carro segue em linha recta (fig 2.3); se o rodarmos num sentido e o mantivermos fixo, ele passará a descrever uma circunferência nesse mesmo sentido (fig 2.4). Essa circunferência será tanto mais fechada (com maior "curvatura"), quanto mais tivermos rodado o volante (ver [web1]).

Deste modo, a recta, que corresponde à trajectória associada à ausência de movimento no volante, tem curvatura nula. Por sua vez, a circunferência tem curvatura constante e, seguindo a convenção de que o sentido contrário aos ponteiros do relógio é positivo, essa constante poderá ser positiva ou negativa (fig 2.5).

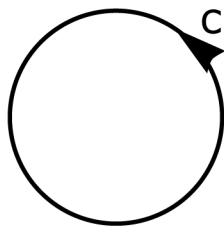


2.3

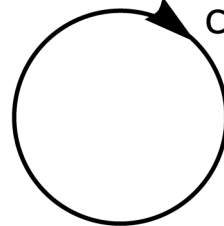


2.4

curvatura 0



curvatura
costante
positiva



curvatura
costante
negativa

2.5

A formalização matemática do conceito de curvatura exige detalhes técnicos, que optámos por não incluir aqui. Limitar-nos-emos a referir que uma curva plana, fechada, sem auto-intersecções tem curvatura constante se e só se o traço da curva é uma circunferência.

A circunferência tem outras virtudes de natureza distinta que poderiam servir igualmente como definição. Neste capítulo, dois módulos concebidos pelo Atractor - *Matemática do futebol* (fig 2.6) e *Rodas de largura constante* (ver fotografia patente na capa do capítulo) - servirão de mote para uma discussão sobre qualidades que caracterizam a circunferência e outras que são partilhadas por mais curvas.

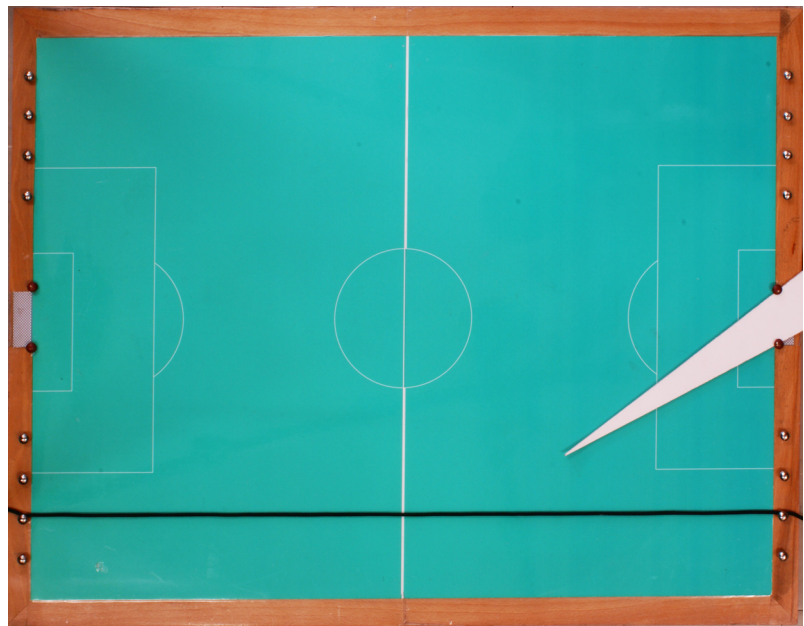
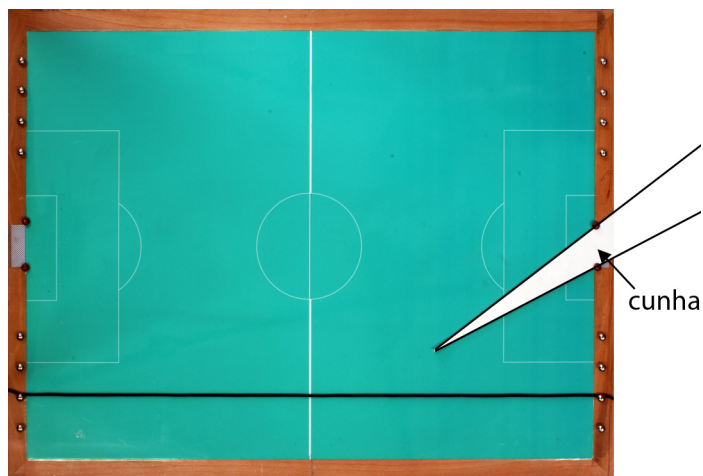


fig 2.6



2.7

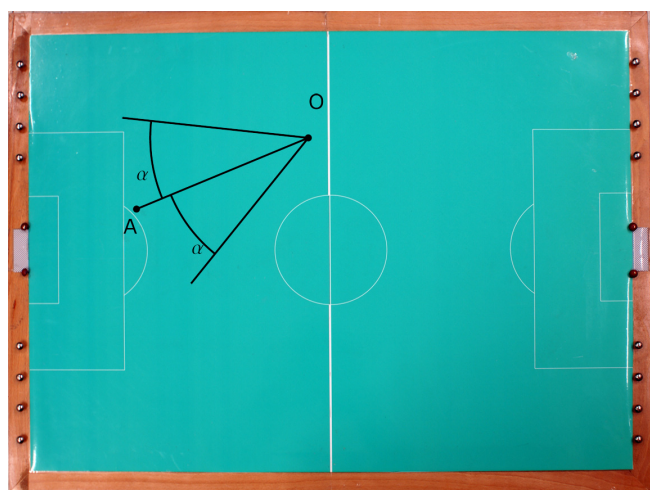
2.7 O módulo é constituído por um modelo de um campo de futebol e várias cunhas.

2.8 A bola deslocar-se-á no interior do cone representado na figura.

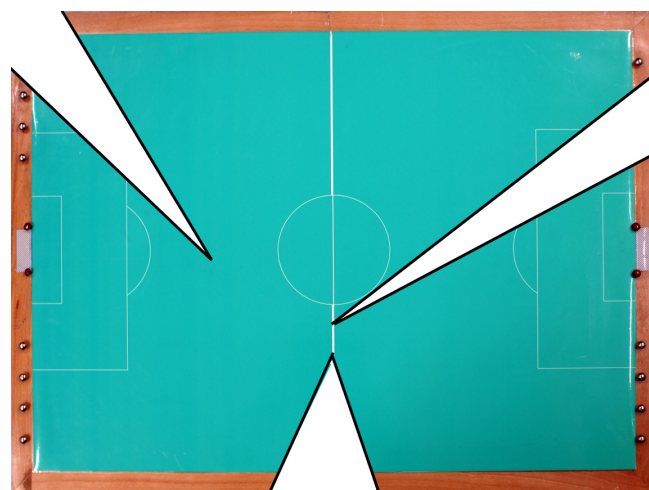
2.9 Cunhas disponíveis para os visitantes.

2.10 Alguns pontos de onde o remate seria certo.

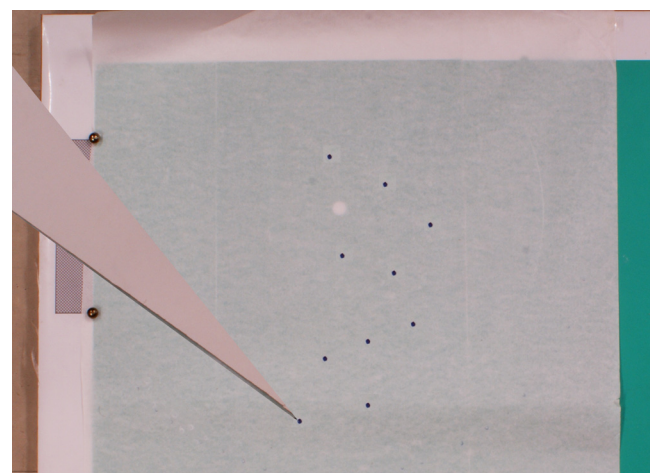
2.11 Alguns pontos na região que delimita a zona de onde o remate seria certo.



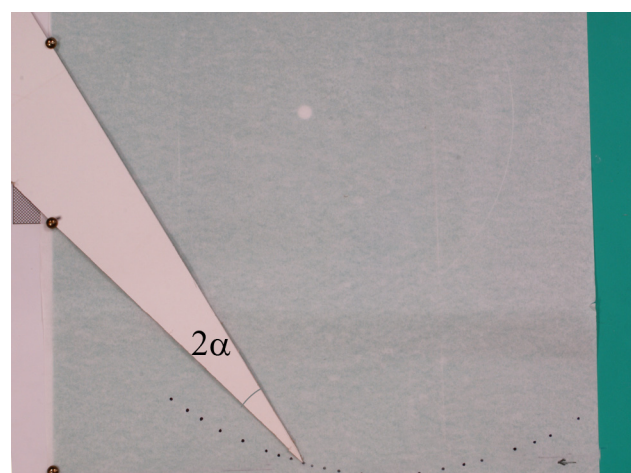
2.8



2.9



2.10



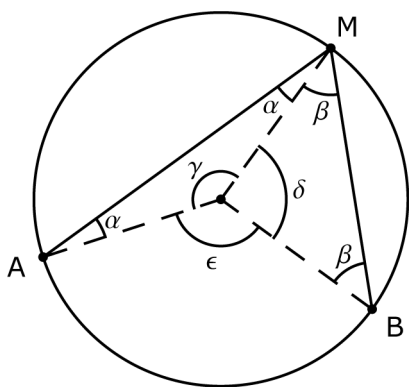
2.11

A Matemática do futebol

No futebol, faz parte da estratégia a determinação do local ideal para a marcação de golo. E, mesmo ignorando a presença de jogadores da equipa adversária, não é certo que um jogador marque golo de qualquer ponto do campo. Claro que um jogador colocado um metro à frente do meio da baliza, e sem adversários, consegue marcar golo. De que outros pontos poderá ter igual certeza? A resposta depende da pontaria do jogador. E, no módulo, a eficácia da pontaria é representada por uma cunha com ângulo igual ao dobro do seu ângulo máximo de erro (fig 2.7). Exemplifiquemos com um caso concreto: na figura 2.8, quando um jogador que se encontra na posição O remata para A, em geral, a bola não segue exactamente a direcção \overrightarrow{OA} . Assim, para cada jogador, estipula-se um valor para o seu erro máximo (neste caso, supõe-se esse valor igual a α) e, de acordo com o modelo adoptado, a bola seguirá ao longo de uma linha recta dentro do ângulo, de amplitude 2α . É certo que o modelo adoptado é algo simplista, mas retrata, até certo ponto, o que se passa realmente num jogo de futebol. (Na referência [O1] pode ler-se mais informação sobre o modelo).

Ao utilizador do módulo é solicitado que determine de entre as cunhas disponíveis (fig 2.9) a correspondente ao melhor jogador. Esta questão gera frequentemente equívocos, já que, estando a cunha associada ao erro do jogador, o ideal é que ela seja o mais pequena possível, mas há quem entenda que uma cunha grande significa uma maior abrangência do remate. Supondo a não existência de adversários, de que pontos é certa (se o jogador apontar bem) a marcação de golo?

Numa folha de papel transparente previamente fixada sobre o campo e, colocando uma cunha (como indicado na figura 2.10), o visitante vai marcando pontos de onde o remate seria certo (ver [web6]). Na verdade, para delimitar a região desejada basta ir assinalando os pontos correspondentes às posições da cunha em que ela encosta aos dois postes da baliza (fig 2.11).



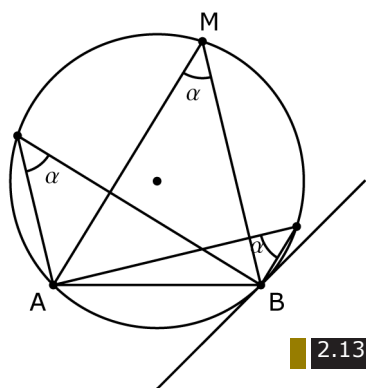
2.12

2.12 Numa circunferência unitária, sendo a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo igual a 180° , tem-se $\alpha + \gamma + \alpha = 180^\circ$ e $\beta + \beta + \delta = 180^\circ$. Somando as duas igualdades, membro a membro, obtém-se $2(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 360^\circ$. Logo, $\alpha + \beta = 1/2[360^\circ - (\gamma + \delta)]$, isto é, a amplitude de $\angle AMB$ é igual a $1/2 \epsilon$, ou seja, $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$

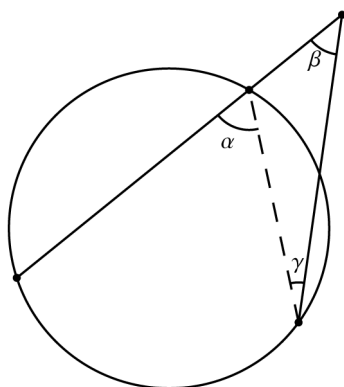
2.13 Todos os ângulos assinalados na circunferência unitária têm amplitude igual a $1/2$ do arco AB.

2.14 Em qualquer triângulo, a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes: $\alpha = \beta + \gamma$ e, portanto, $\alpha > \beta$.

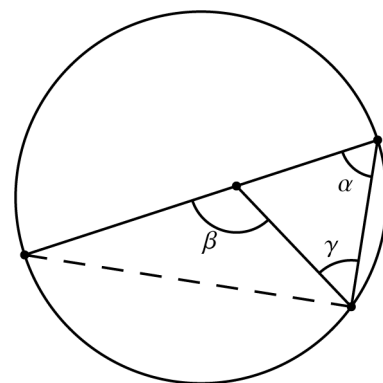
2.15 Como $\beta = \alpha + \gamma$, conclui-se que $\alpha < \beta$.



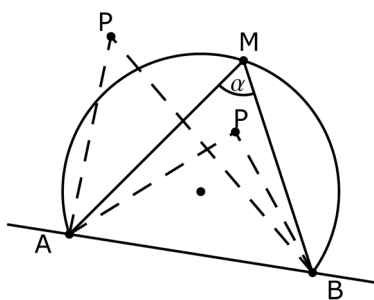
2.13



2.14



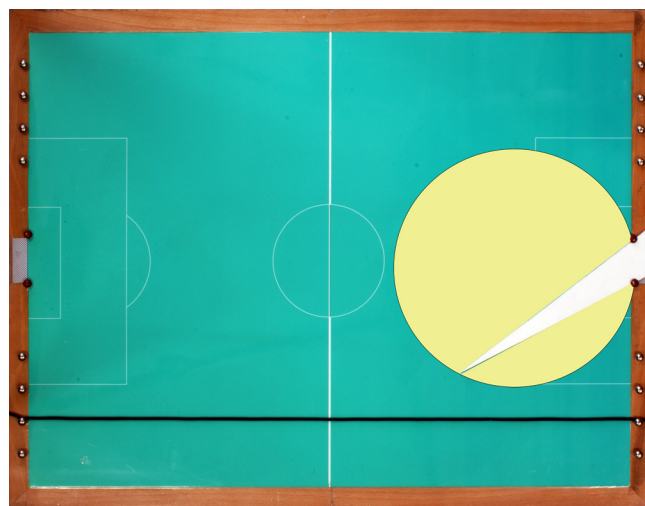
2.15



2.16

2.16 A amplitude de $\angle APB$ é maior que α se P for um ponto interior à curva e menor no caso de ser exterior.

2.17 A amarelo está assinalada a região de onde o remate seria certo, para um ângulo de erro correspondente à cunha representada.



2.17

Observando os pontos marcados experimentalmente (fig 2.11), é natural conjecturarmos que se trata de um arco de circunferência a curva que delimita a região onde um jogador, que aponte correctamente, está seguro de marcar golo. Será assim?

Recordemos um resultado matemático que relaciona precisamente a circunferência com os seus ângulos inscritos - o *Teorema do arco capaz*. Vejamos o que afirma¹ (informação adicional na referência [A]):

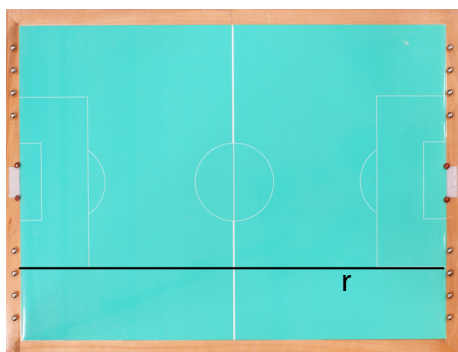
1) qualquer ângulo inscrito numa circunferência, de raio R , tem amplitude igual a $1/(2R)$ do arco por ele subtendido (fig 2.12); daqui resulta, em particular, que ângulos inscritos numa circunferência e suportados pela mesma corda são iguais (fig 2.13);

2) fixado um ângulo $\angle AMB$ de amplitude α , o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o ângulo $\angle APB$ tem amplitude α é precisamente o arco de circunferência com extremos A e B e que passa em M (fig 2.16). Além disso, considerando a curva formada pelo referido arco em conjunto com o segmento $[AB]$, então, se um ponto P está no interior da curva, a amplitude de $\angle APB$ é maior do que α (fig 2.15) e, se P é exterior à curva, a amplitude de $\angle APB$ é menor do que α (fig 2.14).

Regressemos ao problema proposto no início desta página. Repare-se que, para qualquer ponto P marcado (fig 2.11), a amplitude do ângulo $\angle APB$ é 2α (amplitude da cunha). Do que acabámos de enunciar em 2, os pontos nestas condições pertencem efectivamente a um arco de circunferência e a região adequada para rematar à baliza é a assinalada a amarelo na figura 2.17.

Consideremos agora uma situação concreta: um jogador está a correr ao longo de uma linha r paralela à linha lateral (fig 2.18). Há algum sítio, nessa linha, onde ele tenha a certeza de marcar golo?

¹ Neste texto, ângulo e corda serão usados no sentido de ângulo e corda orientados e os ângulos serão medidos em radianos.



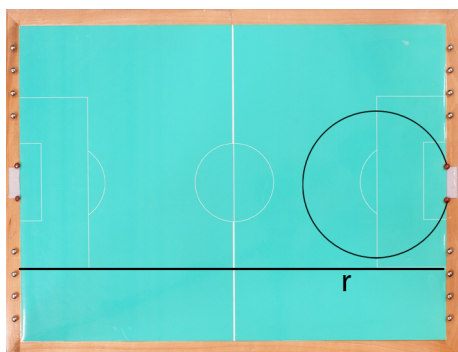
2.18

2.18 Supõe-se que um jogador está a correr ao longo de uma recta (assinalada a preto).

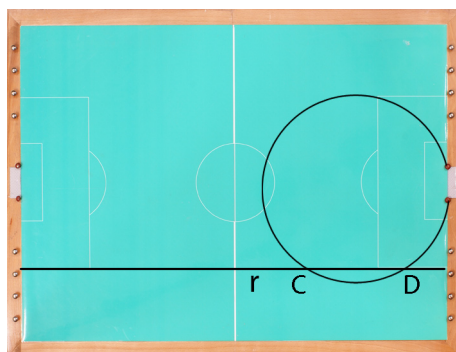
2.19 Na situação ilustrada na figura, não há qualquer ponto na recta de onde se possa garantir um remate certo.

2.20 Rematando de um qualquer ponto do segmento $[CD]$, é garantida a marcação de golo.

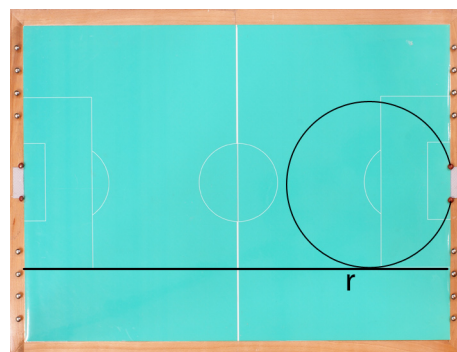
2.21 Na situação ilustrada na figura, há um único ponto na recta a partir do qual é garantida a marcação do golo: o ponto de tangência entre a recta e a circunferência.



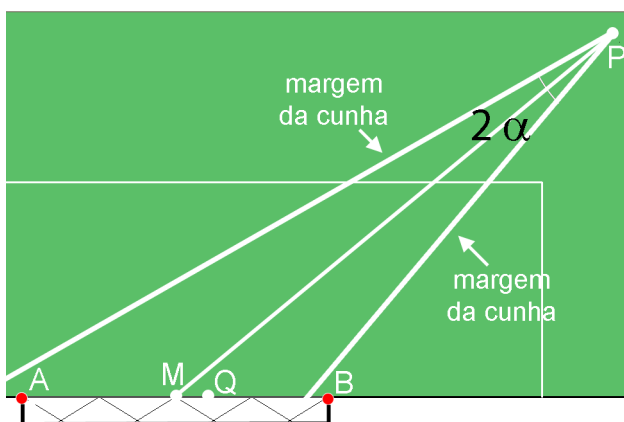
2.19



2.20



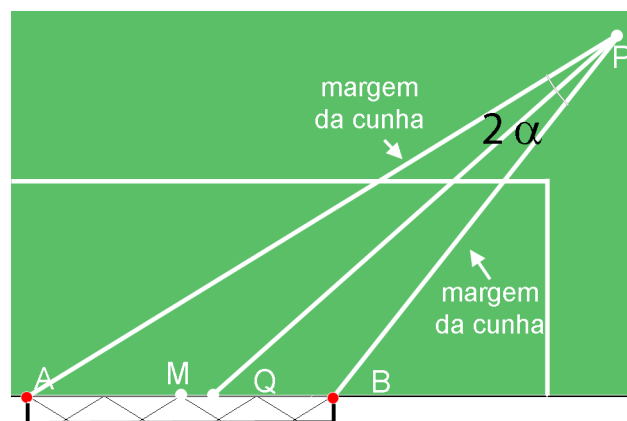
2.21



2.22

2.22 Para um remate a partir de P associado a um erro máximo de α , não é certa a marcação de golo: conforme ilustrado na figura, a bola poderá passar à esquerda de A, um dos postes da baliza.

2.23 Rematando, para um erro máximo de α , a partir de P apontando para Q (o ponto de intersecção da bissetriz da cunha com $[AB]$) é certa a marcação de golo.



2.23

De novo, a resposta depende do jogador, ou seja, da cunha que lhe está associada. E podem ocorrer três situações distintas. Tendo um dado jogador um erro máximo α , a amplitude da cunha a ele associada será de 2α . Considerando o arco capaz que passa pelos extremos da baliza e tem um ângulo inscrito 2α (para diferentes valores de α), então:

(1) ou o arco não intersecta r , e por isso não há nenhum sítio de onde seja certa a marcação de golo (fig 2.19);

(2) ou o arco e a recta r intersectam-se em dois pontos, C e D , e o golo está garantido, se marcado a partir do segmento de recta $[CD]$ (fig 2.20);

(3) ou r é tangente ao arco e o ponto de tangência é o único em que está assegurada a marcação de golo (fig 2.21).

Até ao momento, analisámos os melhores locais de remate à baliza, aqueles a que os defesas da equipa adversária devem prestar mais atenção. Concentrar-nos-emos agora num outro problema: encontrando-se o jogador num bom sítio para rematar, para onde deve ele apontar a bola se pretende marcar golo? Para o meio da baliza?

No módulo e, recorrendo a uma abordagem experimental, o participante tem a oportunidade de, testando com diversas cunhas (jogadores), verificar que, em certas circunstâncias (como as descritas na figura 2.22), é possível que um jogador na posição P , ao apontar a bola para o ponto médio M de $[AB]$, falhe a marcação do golo. Com um pouco mais de esforço, convence-se que, se o jogador apontar para o ponto Q de intersecção da bissectriz de $\angle APB$ (que corresponde também à bissectriz da cunha) com $[AB]$, então, sem a intervenção dos defesas ou do guarda-redes, o golo estaria garantido (fig 2.23).

Q pode coincidir com M , mas isso só se verifica quando o triângulo $[APB]$ é isósceles, com $|PA| = |PB|$.



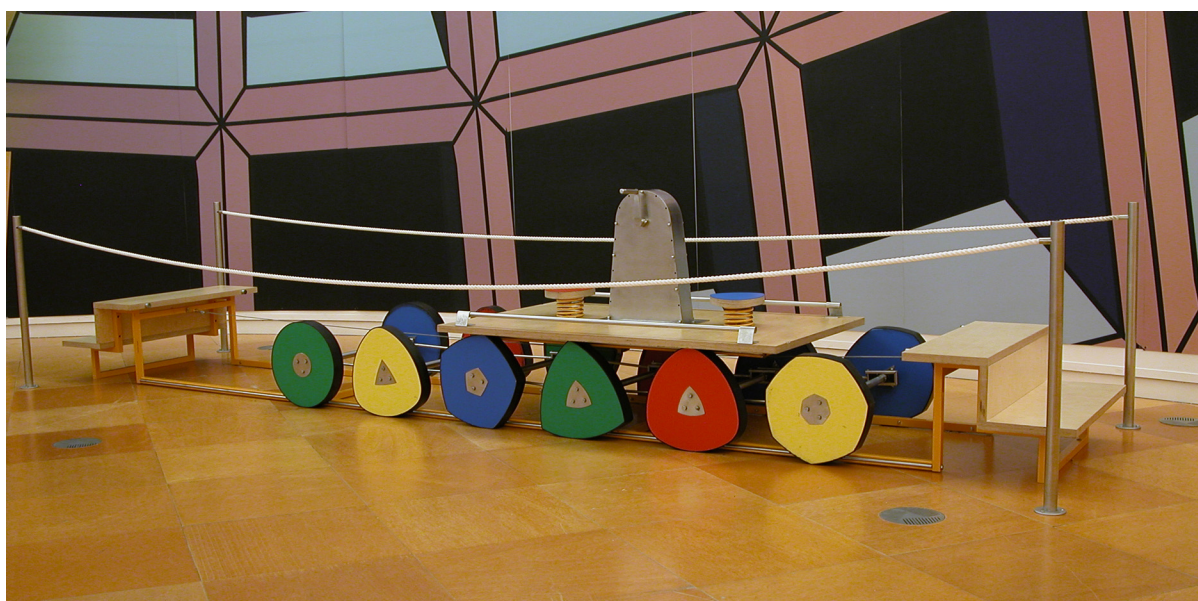
2.24

2.24 Nos tapetes rolantes existentes em muitas fábricas são utilizados cilindros para os rolamentos.

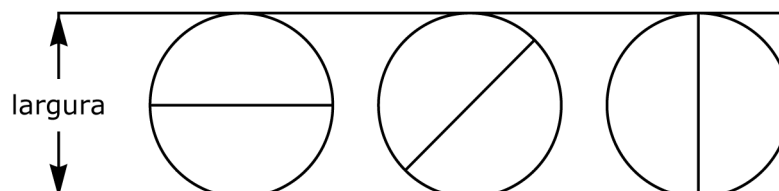
2.25 Carrinho com rodas exóticas que estava patente na exposição Matemática Viva.

2.26 A circunferência tem largura constante.

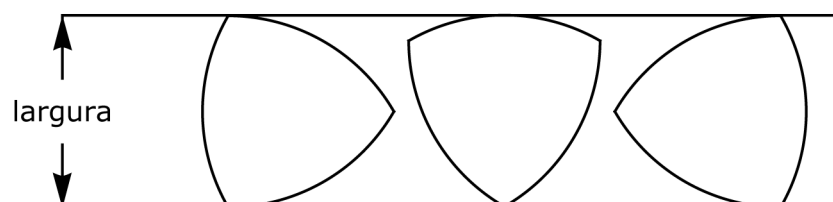
2.27 O triângulo de Reuleaux tem largura constante.



2.25



2.26



2.27

Rodas de largura constante



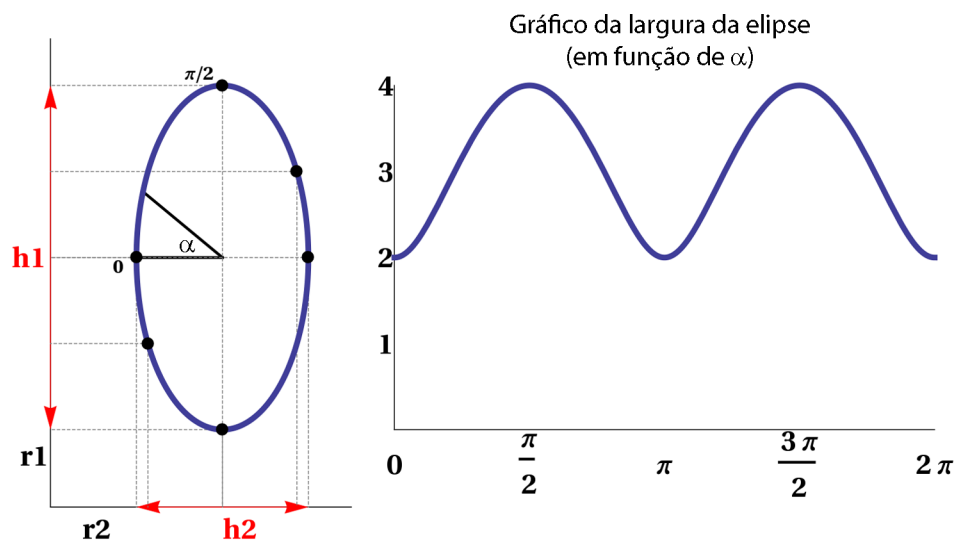
fig 2.28

Por que motivo são as rodas dos carros circulares?

A questão poderá parecer inusitada, mas detenhamo-nos um pouco mais nela. Num carro, cada par de rodas está unido por um eixo que passa pelos seus centros. O formato da roda garante que todos os pontos do bordo estão à mesma distância do centro, pelo que o eixo e os passageiros se movimentam sem oscilações. Em particular, o centro geométrico da roda desloca-se na horizontal.

Quando se transporta um objecto pesado, o sistema de rodas unidas por um eixo pode não ser suficientemente robusto e, por isso, é frequente utilizarem-se rolamentos: os objectos são transportados numa plataforma que rola sobre cilindros de igual secção (é o caso dos tapetes rolantes da figura 2.24). Para o movimento decorrer sem oscilações será imperativo usar cilindros?

Na exposição Matemática Viva ([web3]), existia um carrinho com rodas exóticas cujos bordos (com uma excepção) não são circunferências (fig 2.25). O visitante, que se encontrava sobre uma tábua, ao dar à manivela, deslizava sem oscilações numa estrada plana. Como é que tal é possível? Qual a justificação matemática para que tão excêntrico carro se movimenta de uma forma tão suave? O que se passa aqui é que o movimento decorre do deslizamento de uma plataforma que não está fixada aos eixos das rodas. Nestas circunstâncias, não é preciso manter o centro geométrico da roda na horizontal, já que a propriedade responsável pelo movimento suave é o facto de as curvas utilizadas terem largura constante (figs 2.26 e 2.27).



2.29

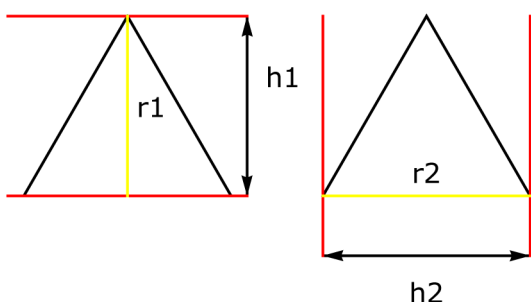
2.29 A elipse não tem largura constante: as alturas h_1 e h_2 da curva, respectivamente na vertical e na horizontal, são distintas.

2.30 O triângulo equilátero não tem largura constante pois $r_1 = \sqrt{3}/2 r_2 < r_2$.

2.31 O quadrado não tem largura constante pois $r_2 = \sqrt{2} r_1 > r_1$.

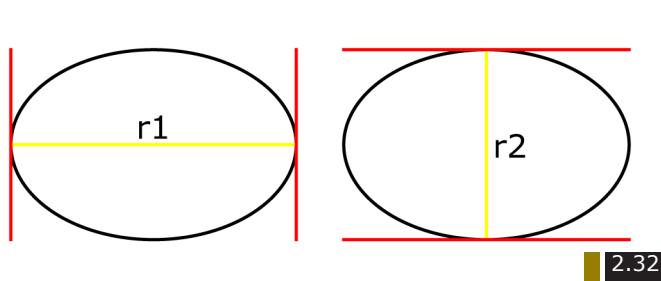
2.32 A elipse representada não tem largura constante.

2.33 A circunferência tem largura constante.

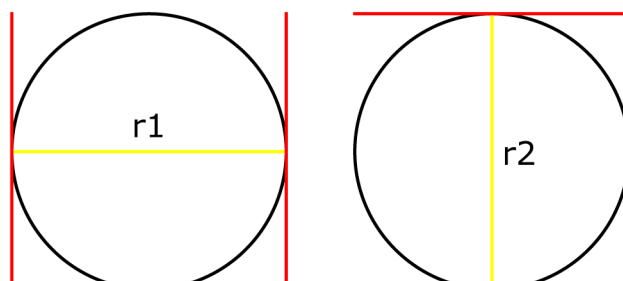


2.30

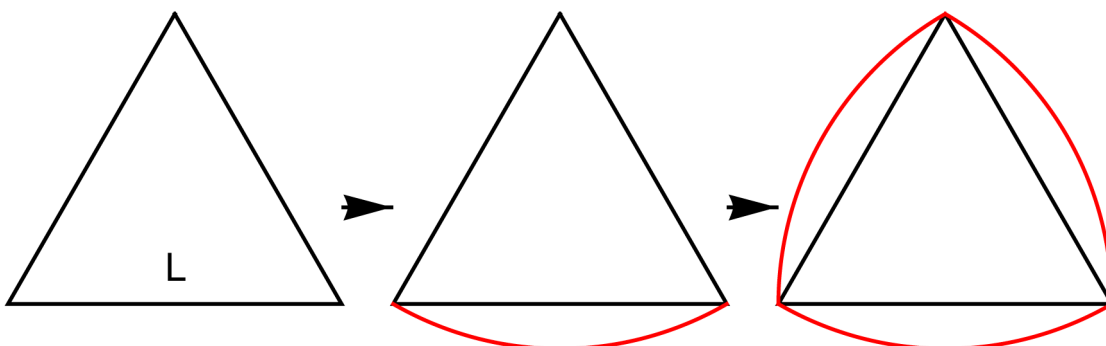
2.31



2.32



2.33



2.34 Triângulo de Reuleaux.

2.34

Dada uma curva plana e fechada C , a largura de C numa direcção fixada r_1 é o comprimento do segmento de recta que se obtém projectando, em r_1 , cada ponto de C perpendicularmente a r_1 (fig 2.29). Diz-se que a *largura da curva* é constante se esse comprimento for o mesmo para todas as direcções do plano (Na referência [O2] podem ler-se mais informações sobre curvas de largura constante.).

A verificação desta propriedade para uma curva fixada exige que consideremos as infinitas direcções do plano. Por exemplo, se a curva é uma circunferência, para qualquer direcção, a largura é igual ao diâmetro da circunferência. Pelo contrário, para afirmarmos que uma curva não tem largura constante, basta exhibir duas direcções que correspondam a larguras distintas. Por exemplo, nem um triângulo equilátero, nem um quadrado, nem uma elipse distinta da circunferência possuem largura constante: confira-o nas figuras 2.30, 2.31 e 2.32 respectivamente. Mas a circunferência não é a única curva com largura constante. Há uma infinidade de outras curvas, sendo o exemplo mais simples o *triângulo de Reuleaux* (cujo nome homenageia o engenheiro alemão Franz Reuleaux, 1829-1905), que se

obtém de um triângulo equilátero de lado L , desenhando três arcos de circunferência com raio L (fig 2.34) e centro em cada um dos vértices do triângulo. Verifiquemos que esta curva possui largura constante.

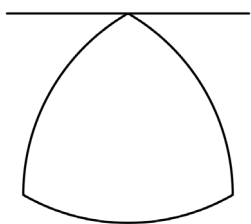


fig 2.35
Recta de suporte que não é tangente.

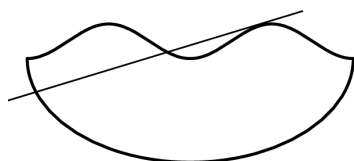
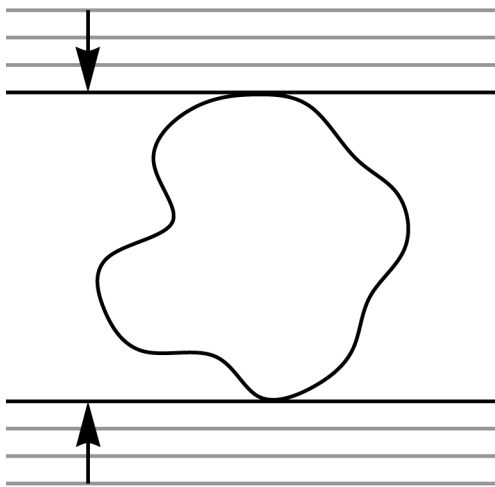


fig 2.36

Recta tangente que não é de suporte.

Designaremos por *recta de suporte de uma curva* uma linha que tem pelo menos um ponto de intersecção com a curva e tal que esta fica inteiramente de um dos lados da recta (é o caso das linhas a vermelho assinaladas nas figuras 2.30, 2.31, 2.32, e 2.33). Pode provar-se que, em cada direcção, qualquer curva fechada tem exactamente duas rectas de suporte (detalhes em [R]).



2.37

2.37 Método para determinar as rectas suporte de uma curva numa determinada direcção.

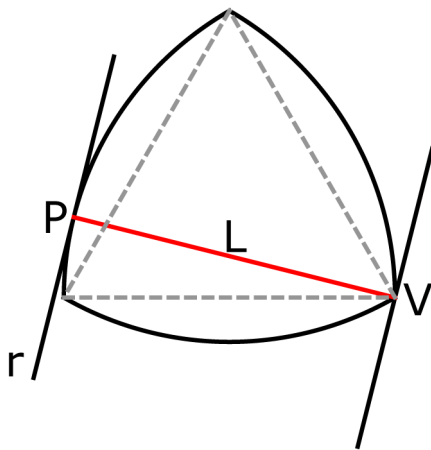
2.38 Largura do triângulo de Reuleaux na direcção de r .

2.39 Largura do triângulo de Reuleaux na direcção de r .

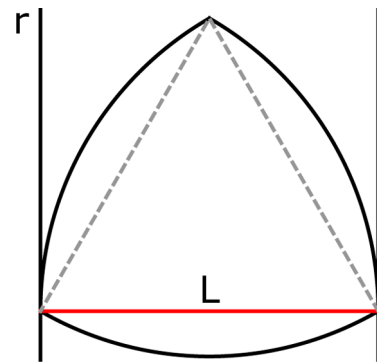
2.40 Curva obtida pelo mesmo processo que o triângulo de Reuleaux, mas partindo de um pentágono.

2.41 Curva obtida pelo mesmo processo que o triângulo de Reuleaux, mas partindo de um heptágono.

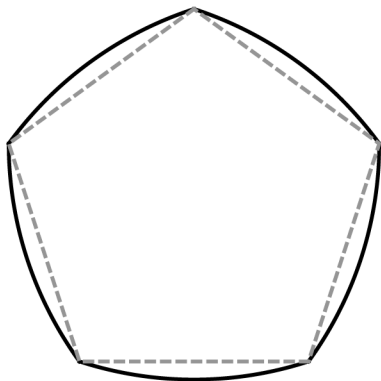
2.42 Curva obtida pelo mesmo processo que o triângulo de Reuleaux, mas partindo de um eneágono.



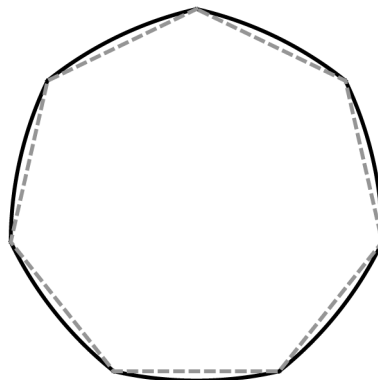
2.38



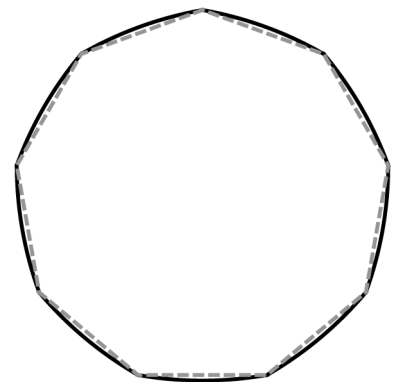
2.39



2.40



2.41



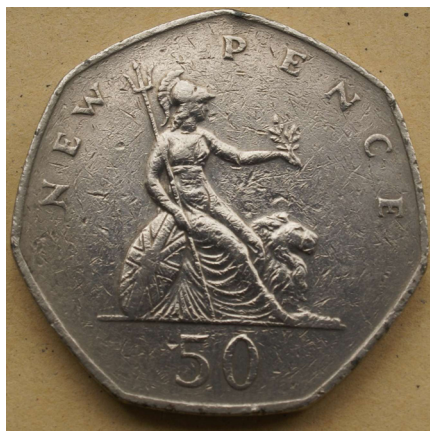
2.42

Um processo para obter rectas de suporte, numa dada direcção, de uma curva consiste em colocar a curva entre duas rectas paralelas à direcção fixada e deslizá-las, mantendo o paralelismo, até tocarem a curva (fig 2.37). Note-se que, se uma curva tem largura constante, a distância entre cada par de rectas de suporte (paralelas) é a mesma.

Voltemos ao triângulo de Reuleaux. Fixada uma direcção e determinada uma recta suporte r com essa direcção, se ela passar por um ponto P interior a um arco de circunferência, dos que constituem um triângulo de Reuleaux, a recta será tangente à curva em P (fig 2.38). Logo, o segmento que une P ao vértice V do triângulo é um raio desse arco de circunferência (de comprimento L , digamos), e portanto perpendicular a r . Ora, a recta que passa pelo vértice V e é perpendicular a $[PV]$ é também uma recta de suporte do triângulo de Reuleaux com a direcção de r e, por conseguinte, a largura da curva nessa direcção é L .

Falta determinar a largura na direcção de uma recta que passe por dois vértices do triângulo (fig 2.39). Neste caso, as rectas de suporte são perpendiculares ao segmento que une os referidos vértices, e a distância entre elas é novamente L . Esgotámos, pois, todos os cenários possíveis, podendo garantir que o triângulo de Reuleaux tem largura constante (L).

Anteriormente, afirmámos que existe uma infinidade de curvas de largura constante, mas apenas apresentámos dois exemplos. O leitor poderá estar curioso por conhecer mais curvas com esta propriedade. Contudo, observe que o processo indicado para a construção do triângulo de Reuleaux pode ser adaptado a qualquer polígono regular com um número ímpar de lados (figs 2.40, 2.41 e 2.42).



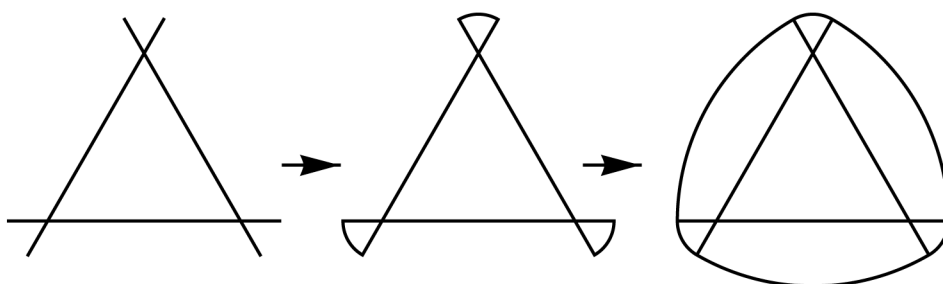
2.43

2.43 Algumas moedas inglesas têm forma de curvas de largura constante.

2.44 Construção de uma curva de largura constante com os cantos arredondados.

2.45 O triângulo de Reuleaux pode ser rodado no quadrado representado sem nunca perder contacto com qualquer um dos lados.

2.46 A circunferência pode ser rodada no quadrado representado sem nunca perder contacto com qualquer um dos lados.

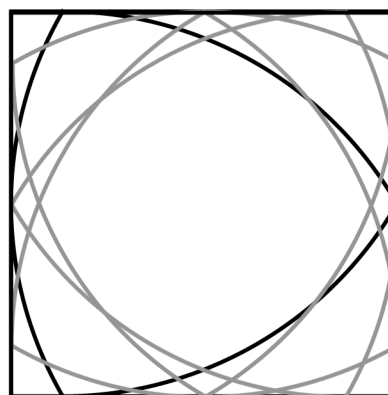


2.44

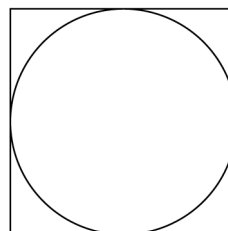


2.47

2.47 Um triângulo de Reuleaux na janela de uma igreja, em Bruges, na Bélgica.



2.45



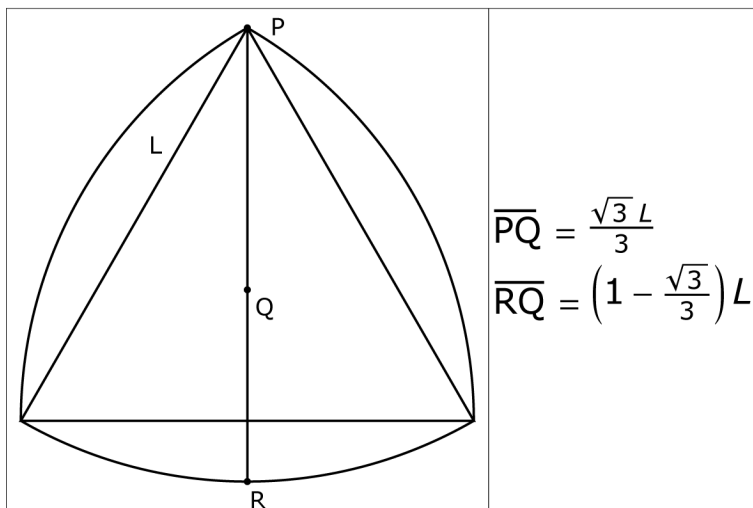
2.46

Deparamo-nos com curvas de largura constante em diversos contextos, em cabines telefónicas, torneiras, rotundas, na forma adoptada para algumas moedas, nomeadamente as britânicas (fig 2.43) ou no próprio bordo de janelas (fig 2.47). Observando as moedas pormenorizadamente, apercebemo-nos que possuem os cantos arredondados. Este arredondamento obtém-se por um processo análogo ao que descreveremos para o triângulo de Reuleaux: depois de se desenhar um triângulo equilátero $[ABC]$, de lado L , prolongam-se os seus lados e, com centro em cada um dos vértices, traçam-se arcos de circunferência de raio r (arbitrário) compreendidos entre os prolongamentos dos lados do triângulo (fig 2.44). Em seguida, com centro nos vértices, desenham-se arcos de raio $L+r$ a unir estes pequenos arcos (fig 2.44). As curvas assim construídas possuem largura constante $L+2r$.

Até ao momento, todas as curvas aqui apresentadas são constituídas por arcos de circunferência. No entanto, existem outros processos para construir curvas de largura constante sem recorrer a este tipo de arcos. O leitor mais curioso poderá consultar a referência [R].

Enunciamos de seguida uma propriedade caracterizadora das curvas de largura constante, isto é, uma propriedade que estas curvas, e apenas estas curvas, satisfazem e que, portanto, poderia servir também de definição:

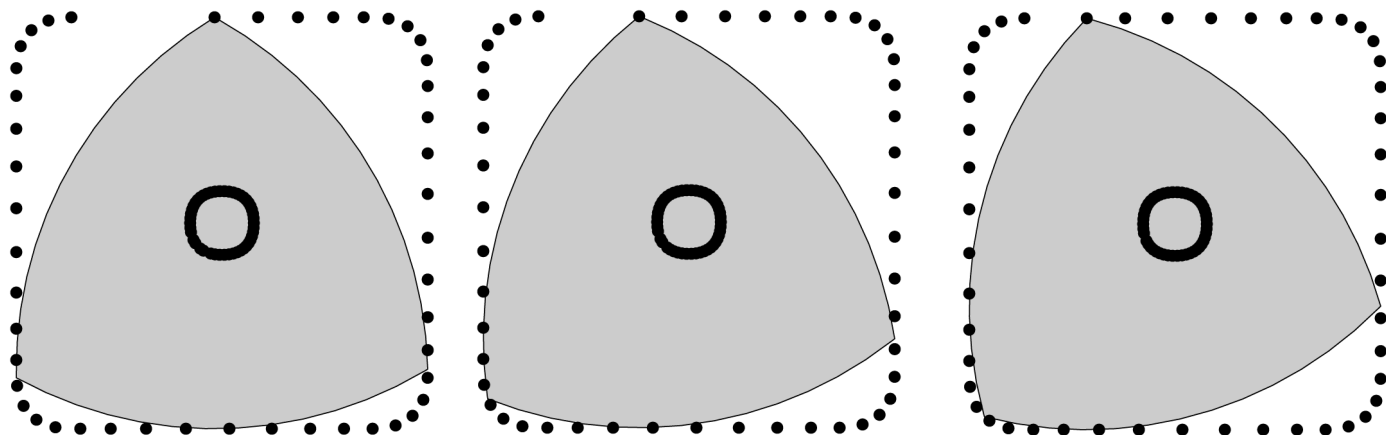
se considerarmos duas direcções perpendiculares e o par de rectas de suporte em cada direcção, elas formam um quadrado onde a curva pode ser rodada sem perder contacto com qualquer um dos lados (figs 2.45 e 2.46).



2.48 Na figura, Q é o centro do triângulo equilátero representado e L é o comprimento do lado.

2.49 Um triângulo de Reuleaux roda dentro de um quadrado. No centro da figura, a traço contínuo, pode observar-se a trajetória do centro geométrico do triângulo de Reuleaux. A trajetória descrita por cada um dos três vértices do triângulo de Reuleaux é um "quadrado" arredondado nos vértices. Detalhes em [W].

2.48



2.49

2.50 Na figura, está representada a lâmina de uma broca. Não se trata de um triângulo de Reuleaux completo, mas é o suficiente para cortar buracos quadrangulares arredondados nos bordos.

2.51 Um rotor com uma forma semelhante a um triângulo de Reuleaux.



2.50



2.51

Contudo, e excluindo o caso da circunferência, durante o movimento dentro do quadrado, o centro geométrico da curva não fica fixo. Por exemplo, no triângulo de Reuleaux, não estando o centro geométrico a igual distância dos pares de rectas de suporte paralelas (fig 2.48), ele altera a sua posição à medida que a roda gira (fig 2.49).

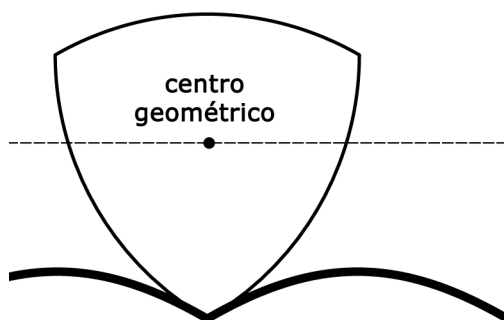
As propriedades do triângulo de Reuleaux, aqui apresentadas de um ponto vista teórico, tiveram consideráveis aplicações na vida real: introduzindo uma lâmina em forma de triângulo de Reuleaux numa broca (fig 2.50), ela corta buracos quadrados, embora arredondados nos vértices. Esta invenção foi patenteada por James Watts, em 1917, (ver [G]).

Também no mundo da Engenharia Mecânica se encontram exemplos dessas aplicações: nos motores Wankel, em vez de um pistão que se move para a frente e para trás num cilindro, há um rotor cuja forma é semelhante a um triângulo de Reuleaux (fig 2.51). Assim, os efeitos indesejáveis do atrito e desgaste causados pelo movimento de vaivém são inteiramente eliminados e têm sido desenvolvidos vários modelos de carros desportivos com esse tipo de motor, nomeadamente pela marca *Mazda* (consultar [C]).

Há outras propriedades que as curvas de largura constante partilham com a circunferência. Uma justificação matemática para tais propriedades transcende o âmbito deste texto. Por conseguinte, limitar-nos-emos a enunciá-las e a indicar referências bibliográficas.

Todas as curvas com largura constante L são convexas e têm igual perímetro - o da circunferência de diâmetro L , isto é, πL (ver [H]).

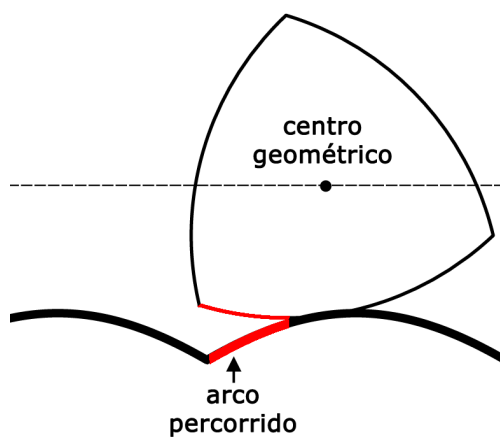
Para qualquer direcção, cada uma das duas rectas de suporte intersecta a curva num só ponto, sendo o segmento que une estes dois pontos de contacto perpendicular às rectas de suporte ([R]).



2.52

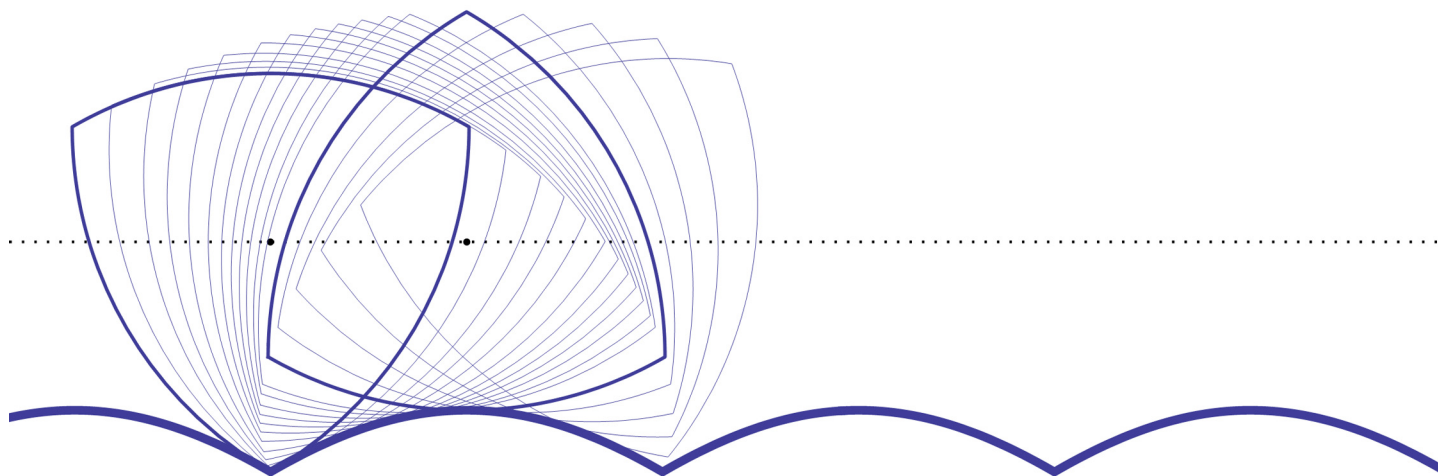
2.52 Pretende-se encontrar uma estrada adequada para que uma roda com a forma de um triângulo de Reuleaux rode, mantendo o seu centro geométrico na horizontal.

2.53 É preciso garantir que a roda e a estrada se mantêm em contacto e que o comprimento percorrido no bordo da roda seja igual ao descrito sobre a estrada. A estrada apropriada ao triângulo de Reuleaux e o movimento da roda na estrada encontram-se representados na figura abaixo.



2.53

2.54 Um triângulo de Reuleaux rodando na estrada adequada.

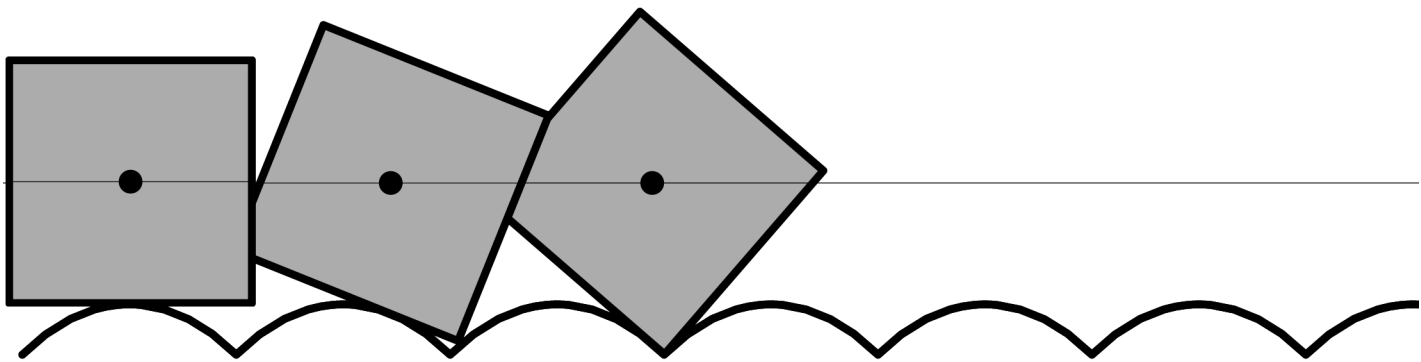


2.54

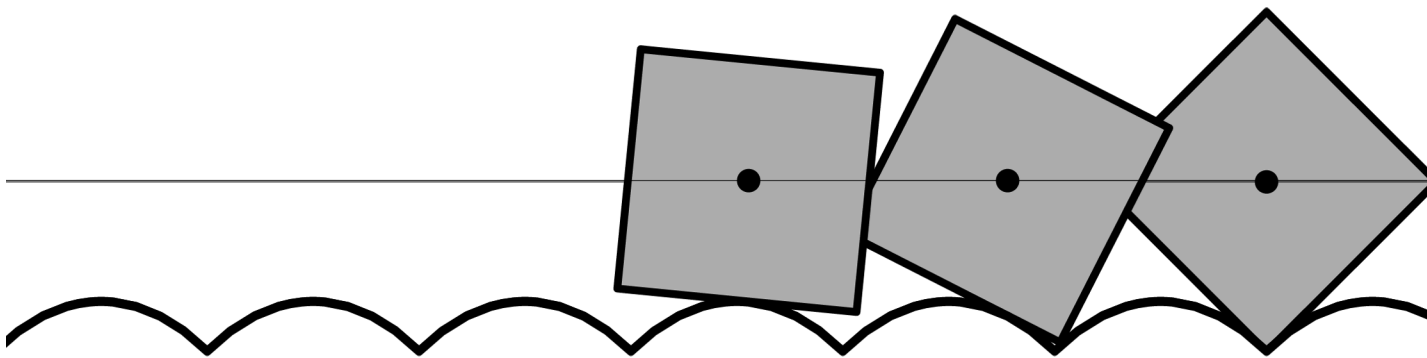
Sabemos ainda que, de entre todas as curvas de largura constante L , que possuem, portanto, o mesmo perímetro, a que engloba maior área é a circunferência (ver [N]) e a que delimita menor área é o triângulo de Reuleaux (consultar [Bo]).

Recordemos que o módulo “carrinho com rodas de largura constante”, patente na exposição Matemática Viva, se deslocava sem oscilações porque as rodas não estavam presas ao eixo do veículo e o movimento decorria apenas da deslocação de uma plataforma de madeira por cima dessas rodas, todas com forma de curvas de largura constante. Contudo, se pretendêssemos construir um veículo semelhante ao carro comum - com as rodas fixadas ao eixo -, as formas utilizadas para as rodas já não seriam adequadas, pois, neste cenário, seria também necessário impor que o centro geométrico se mantivesse paralelo ao chão; ora, vimos já, no triângulo de Reuleaux (fig 2.49), que tal não se verifica. Para um carro convencional, a única roda adequada a uma estrada plana é, pois, a circunferência, e vice-versa.

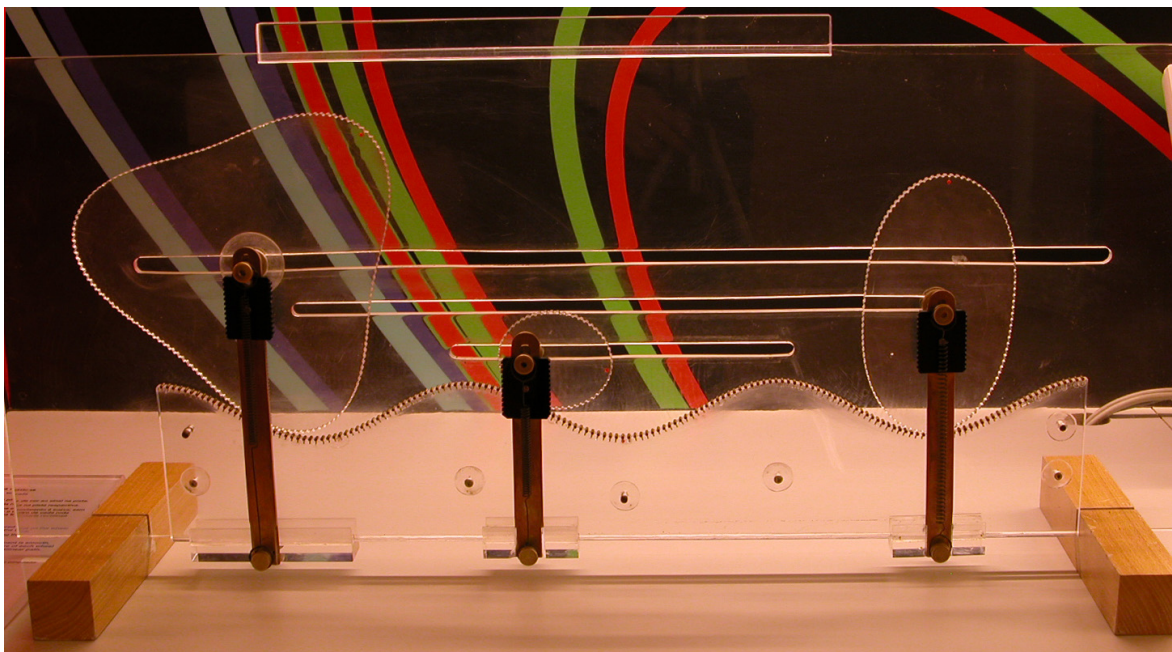
Mas será possível obter um movimento suave com um carrinho cujas rodas iguais possuam a forma de uma curva de largura constante diferente de uma circunferência? Sim, mas será necessário repensar a estrada, pois esta deverá compensar, de alguma forma, as diferenças na largura da curva para direcções distintas. E há três condições a salvaguardar: durante o movimento, a roda e a estrada têm de se manter em contacto; o comprimento percorrido no bordo da roda deverá ser igual ao descrito sobre a estrada; e, além disso, o centro geométrico da roda deverá deslocar-se na horizontal sem oscilações (figs 2.52 e 2.53). Impondo as três condições enunciadas, elaborámos os cálculos necessários e determinámos a estrada adequada ao triângulo de Reuleaux (fig 2.54).



2.55



2.56

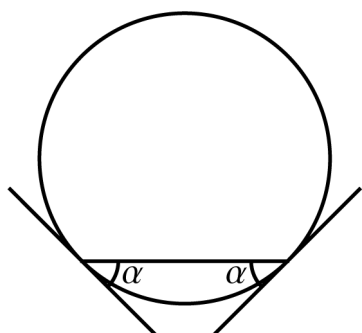


2.57

Se o leitor pretender familiarizar-se com os detalhes técnicos relacionados com a determinação da estrada perfeita para uma roda não circular, aconselhamos a consulta da rubrica "Rodas exóticas" na secção "Para saber mais".

Embora tenhamos determinado a estrada correspondente a uma curva de largura constante, não utilizámos, em qualquer instância, esta propriedade. Na realidade, é também possível determinar a forma da estrada adequada para outras rodas com a forma de curvas que não possuem largura constante - foi o que fizemos para o caso do quadrado (figs 2.55 e 2.56). Pode provar-se que, neste caso, uma tal estrada é feita de arcos de catenária invertidos.

Na exposição Matemática Viva está também patente um módulo em que três rodas de formatos distintos emparelham com uma mesma estrada, perfeita para essas rodas (fig 2.57).



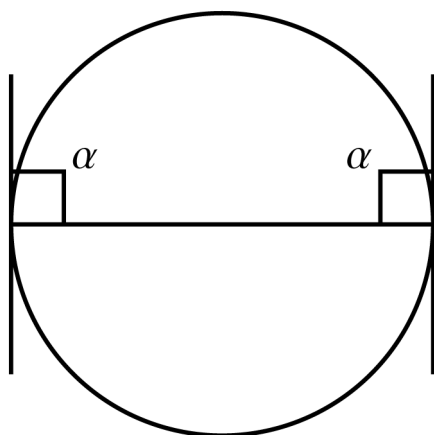
2.58

2.58 Qualquer corda intersecta a circunferência em ângulos iguais.

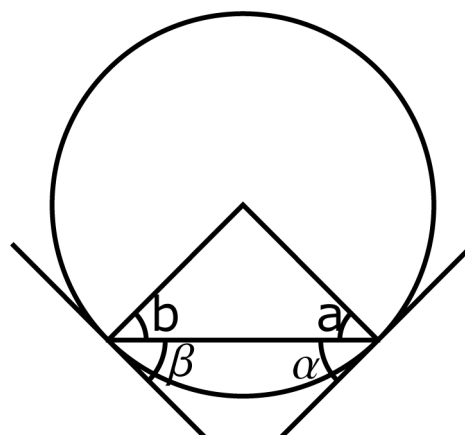
2.59 Um diâmetro intersecta a circunferência em ângulos rectos.

2.60 Na figura, $a=b$, porque são ângulos opostos a lados iguais de um triângulo. Por outro lado, por se tratar de uma circunferência, uma recta tangente num dado ponto é perpendicular ao raio que passa por esse ponto.

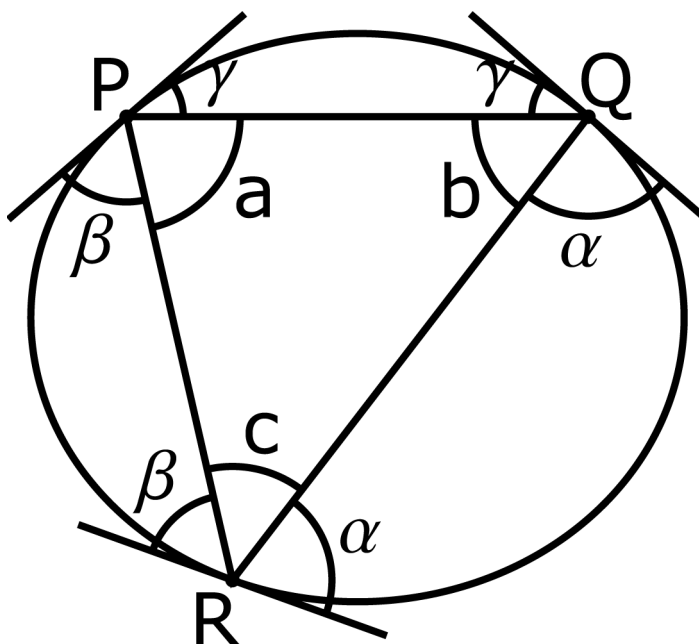
2.61 Na figura, $a=\alpha$, $b=\beta$ e $c=\gamma$.



2.59



2.60



2.61

Para saber mais

Ângulos versus cordas

As três propriedades caracterizadoras da circunferência até agora mencionadas centram-se em aspectos completamente distintos: distância a um ponto, amplitude dos ângulos inscritos e curvatura. Há ainda uma propriedade de natureza diversa das anteriores que iremos analisar de seguida.

Consideremos uma circunferência e uma recta qualquer que a intersecte em dois pontos. A corda correspondente parece intersectar a circunferência em ângulos iguais (fig 2.58). Confirmemos que assim é, distinguindo o caso em que o ângulo em causa (α) é recto (fig 2.59) daquele em que é agudo (fig 2.60).

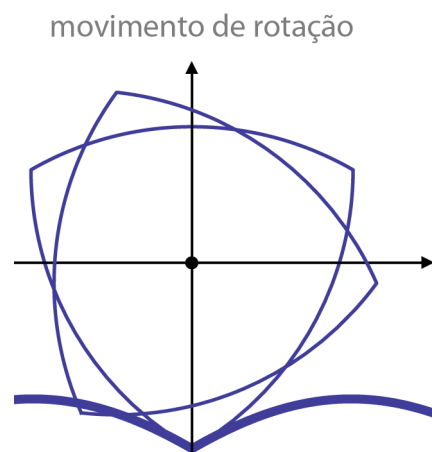
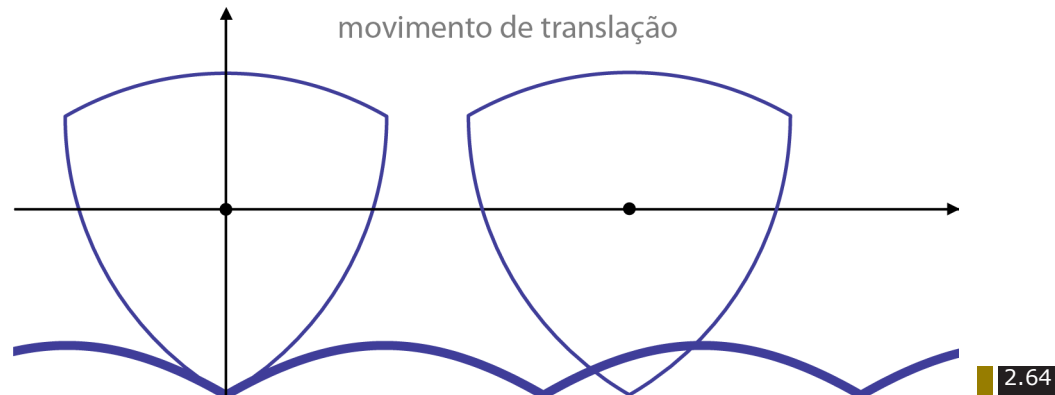
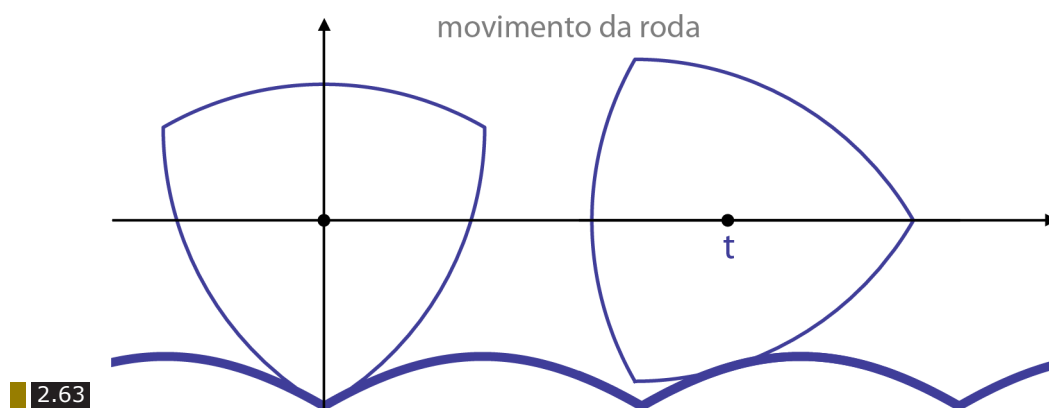
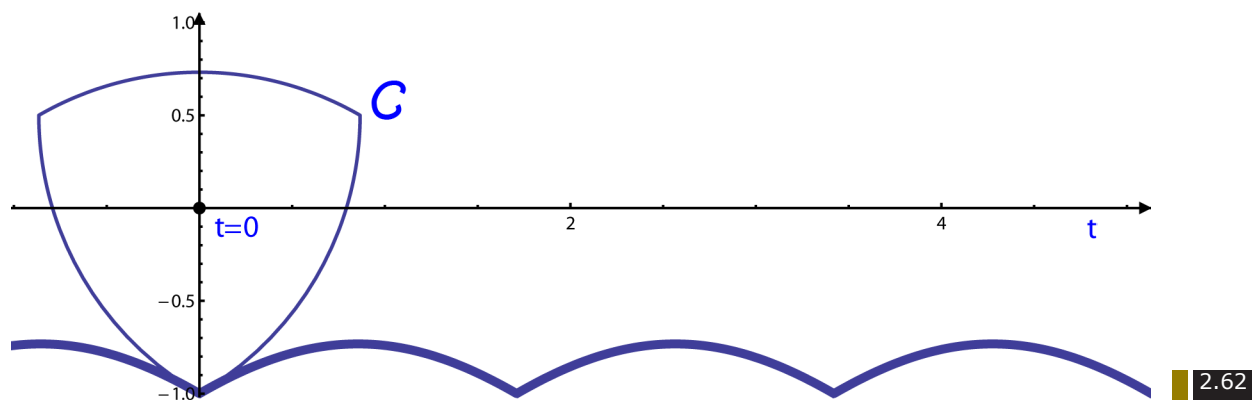
O primeiro cenário ocorre apenas quando a corda é um diâmetro da circunferência (fig 2.59) e, portanto, ambos os ângulos associados à corda medem 90° . No segundo caso, forma-se um triângulo isósceles, pelo que $a=b$ (fig 2.60). Por outro lado, os dois raios assinalados são perpendiculares às rectas tangentes e portanto

$$\alpha = 90^\circ - a = 90^\circ - b = \beta.$$

A circunferência satisfaz, pois, a propriedade enunciada. E o recíproco? Será a circunferência a única curva fechada, plana e sem auto-intersecções que qualquer corda intersecta em ângulos iguais?

Tomemos uma curva nas condições descritas. Consideremos três pontos arbitrários P, Q e R. Traçando as cordas que unem os três pontos e determinando as tangentes nesses pontos, obteremos o que se ilustra na figura 2.61, sendo iguais os ângulos assinalados com a mesma letra. Considerando agora os três ângulos rasos, com vértices em P, Q e R, na figura 2.61, tem-se:

$$\begin{aligned} a + \beta + \gamma &= 180^\circ, \\ b + \alpha + \gamma &= 180^\circ, \\ c + \beta + \alpha &= 180^\circ, \end{aligned}$$



Uma roda em triângulo de Reuleaux parte num instante $t=0$ (fig 2.62). O seu movimento na estrada, apresentado na figura 2.63, pode ser decomposto em dois tipos de movimento distintos: o de translação (fig 2.64) e o de rotação da roda sobre si mesma (fig 2.65).

Somando as três igualdades anteriores, membro a membro, concluímos que $(a+b+c)+2(\alpha+\beta+\gamma)=540^\circ$. Ora, correspondendo a , b e c às amplitudes dos ângulos internos de um triângulo no plano, a sua soma é 180° , pelo que $2(\alpha+\beta+\gamma)=360^\circ$. Agora, comparando as igualdades $a+\beta+\gamma=180^\circ$ e $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, concluímos que $a=\alpha$. Do mesmo modo, deduzimos que $b=\beta$ e $c=\gamma$. Como P , Q e R são arbitrários, este argumento prova que todos os ângulos inscritos na curva e subtendidos por uma mesma corda são iguais. Recordando agora o Teorema do Arco Capaz, concluímos que a curva em causa é uma circunferência.

Rodas exóticas

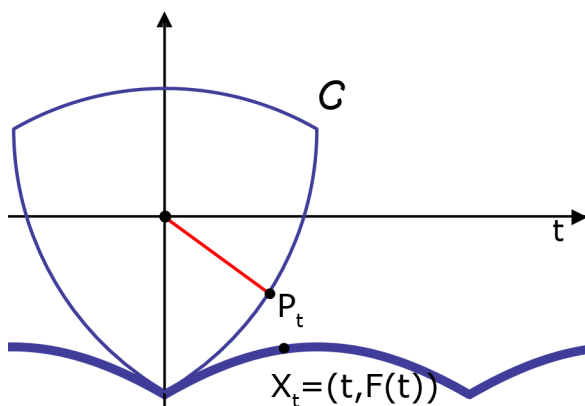
Em exposições interactivas de Matemática é frequente encontrar um módulo que goza de grande popularidade: um carrinho¹ com rodas quadradas que circula numa estrada adequada. A título de exemplo, observe-se um módulo desenvolvido pelo Centro de Ciência Exploratorium, de São Francisco em http://www.exploratorium.edu/xref/exhibits/square_wheel.html

Nesta secção (inspirada no artigo [HW]), dedicaremos-nos a um método para construir estradas adequadas a rodas não convencionais, exemplificando com uma roda quadrada e uma outra com uma forma que nos é agora familiar: em triângulo de Reuleaux. No que se segue, resumem-se os cálculos efectuados na nossa demanda.

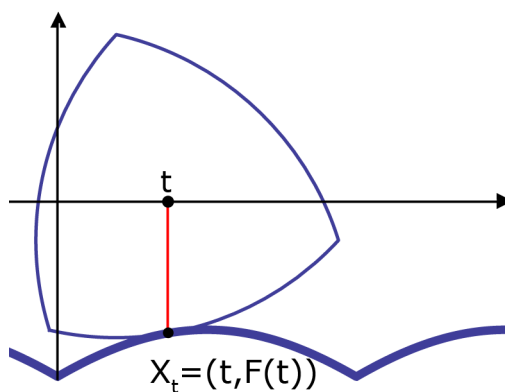
Por circulação suave de uma roda entendemos um movimento durante o qual:

- H1. a roda e a estrada se mantêm em contacto;
- H2. o comprimento percorrido no bordo da roda é igual ao descrito sobre a estrada (fig 2.54);
- H3. o centro geométrico da roda desloca-se na horizontal sem oscilações.

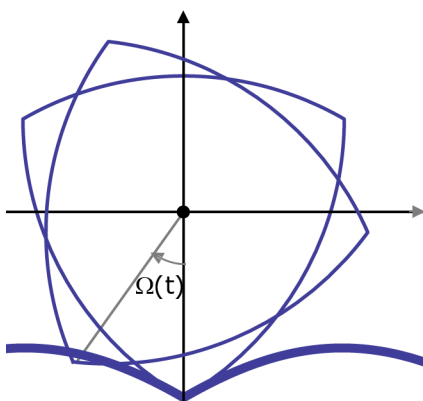
1 http://www.maa.org/mathland/mathtrek_04_05_04.html



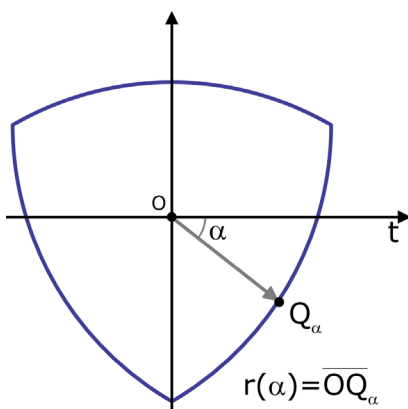
2.66



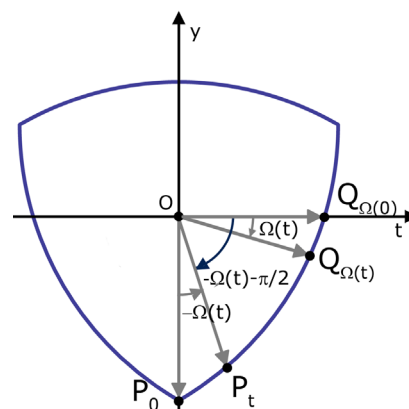
2.67



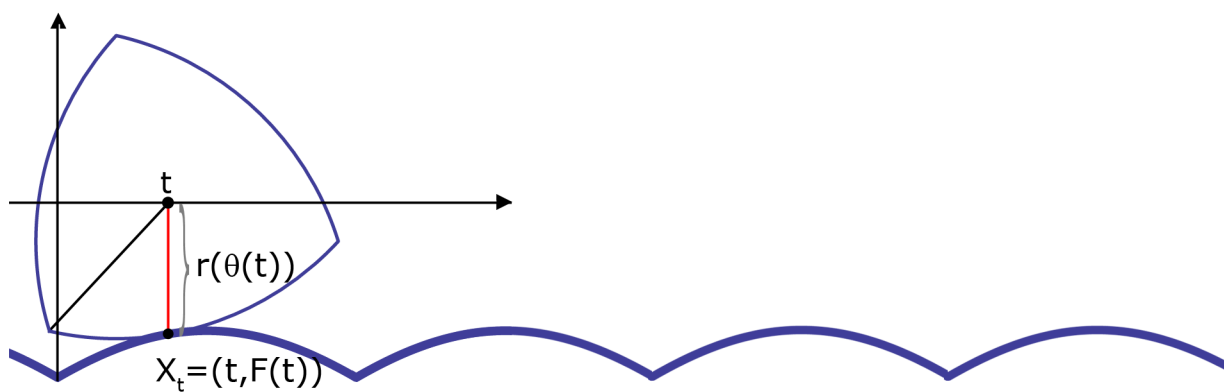
2.68



2.69



2.70



2.71

Procuremos primeiro traduzir matematicamente o movimento suave, sem deslizamento, da roda numa estrada (fig 2.63). A variável t designa o tempo e C é o bordo da roda. Pretendemos encontrar uma estrada que seja gráfico de uma função derivável, digamos F , real e de variável real, tal que $F(t) < 0$ para todo o t . Pela condição H3, suporemos que o centro da roda se desloca no eixo dos t 's. O movimento da roda que aí se inicia pode ser desdobrado em duas componentes: uma translação no eixo dos t 's (fig 2.64) e uma rotação da roda sobre si mesma (fig 2.65), que pode ser descrita por uma função real Ω que regista a amplitude desse ângulo de rotação (fig 2.68). Para simplificação de cálculos, passaremos a usar radianos e não graus.

Para descrevermos a posição do ponto P_t de C que, no instante t , está em contacto com o ponto da estrada $X_t = (t, F(t))$ (figs 2.66 e 2.67), consideraremos ainda a função real $r=r(\alpha)$, que regista a distância de Q_α à origem¹, sendo Q_α o ponto de C que faz um ângulo de amplitude α com o eixo positivo dos t 's (fig 2.69).

No cenário descrito, observe-se que, em geral, $Q_{\Omega(t)} \neq P_t$ (fig 2.70). A título de exemplo, $Q_{\Omega(0)} \neq P_0$.

Note-se ainda que o segmento que une P_t à origem é levado, pelo movimento da roda, no instante t , num outro segmento que fica vertical (fig 2.67).

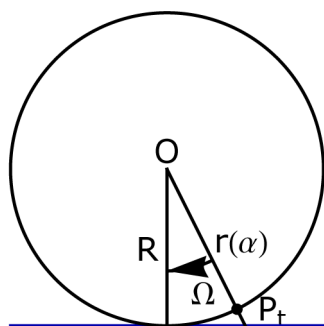
Para determinarmos a posição de P_t é mais conveniente medir o ângulo entre P_t e o eixo positivo dos t 's (em vez de calcular a amplitude do ângulo de rotação da roda sobre si mesma). Isso corresponde apenas a uma mudança de variável¹

$$\theta(t) = -\Omega(t) - \pi/2. \quad [2.1]$$

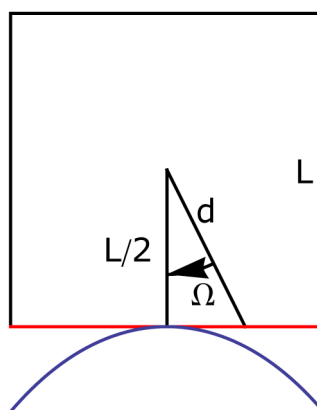
Como P_t é levado em X_t através do movimento da roda, $F(t)$ tem de ser igual ao simétrico da distância de P_t à origem (fig 2.71). Ou seja, devemos ter

$$F(t) = -r(\theta(t)). \quad [2.2]$$

¹ Para o leitor familiarizado com coordenadas polares, note-se que $(\theta(t), r(\theta(t)))$ são as coordenadas de P_t .



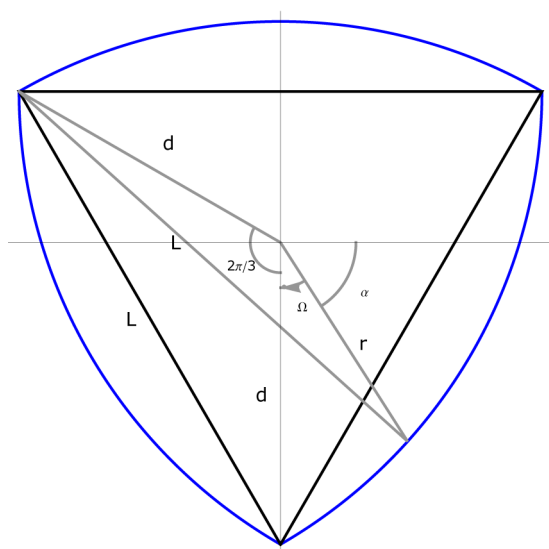
2.72



2.73

2.72 A azul, a estrada adequada à roda circular.

2.73 Uma roda quadrada e parte da estrada adequada.



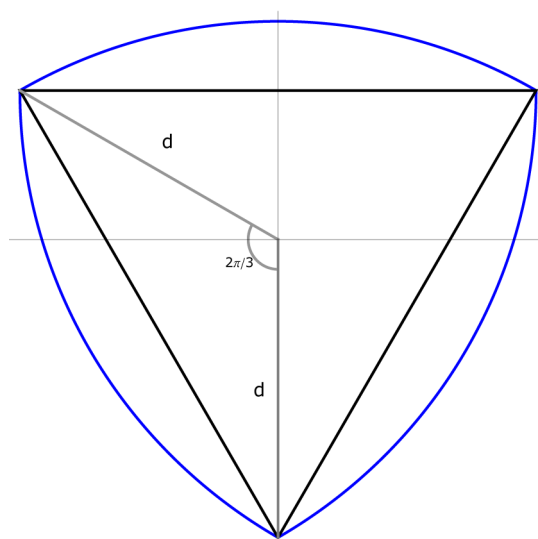
2.74

2.74 Aplicando a Lei dos Cossenos (ver referência [A]) ao triângulo assinalado a cinzento, onde d representa a distância do centro do triângulo aos vértices e L o raio dos três arcos de circunferência que constituem o triângulo de Reuleaux, obtém-se

$$L^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(2\pi/3 - \Omega).$$

2.75 No caso particular assinalado, têm-se:

$$L^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cos(2\pi/3) = 3d^2.$$



2.75

Tendo em consideração a igualdade anterior e a condição H2, é possível deduzir que a equação que rege o movimento da curva ajustado à estrada é descrito pela equação

$$F(t) = -r(\theta(t)) = -1/\theta'(t) \quad [2.3]$$

(detalhes em [HW]).

Os raciocínios elaborados até ao momento são perfeitamente genéricos e podem ser aplicados a outras curvas que não o triângulo de Reuleaux. Exemplifiquemos com um caso concreto, escolhendo aquele que nos é mais familiar: a roda circular.

Neste cenário, a função r é constante e tem-se $r(\alpha) = R$, para todo o α . Por [2.3], $F(t) = -r(\theta(t)) = -R$ e a boa estrada corresponde ao gráfico da função constante indicada na figura 2.72.

Apliquemos agora o método anterior quando C é um quadrado. A simetria no quadrado permite-nos restringir o nosso estudo a um único lado, por exemplo, o assinalado a vermelho (fig 2.73). Sabemos que, para um dado Ω ,

$$(L/2)/d = \cos(\Omega), \text{ i.e.,} \\ d = (L/2)/\cos(\Omega), \text{ com } -\pi/4 \leq \Omega \leq \pi/4.$$

Para simplificação de cálculos, e mudando o sistema de unidades se necessário, supomos $L=2$, pelo que $d = 1/\cos(\Omega)$. Na variável θ ($\theta = -\Omega - \pi/2$), esta igualdade é

$$d = 1/\cos(-\theta - \pi/2) = 1/\cos(\theta + \pi/2) = -1/\sin(\theta).$$

De [2.3], resulta que, para $-3\pi/4 \leq \theta \leq -\pi/4$,

$$1/\theta'(t) = -1/\sin(\theta(t)),$$

A equação diferencial anterior tem solução explícita $\theta(t) = -2 \arctg(e^{-t+k})$, sendo k uma constante, que se determina tendo em conta que $\theta(0) = -\pi/2$: como $-\pi/2 = -2 \arctg(e^k)$, tem-se $e^k = \tg(\pi/4) = 1$ e $k=0$.



2.76



2.77



2.78



2.79

Ainda pela condição [2.3], temos

$$F(t) = -r(\theta(t)) = 1/\text{Sen}(-2 \arctg(e^{-t})), \\ t \in [\theta^{-1}(-3\pi/4), \theta^{-1}(-\pi/4)],$$

sendo possível simplificar a expressão anterior para

$$F(t) = -(e^t + e^{-t})/2.$$

Ora, a curva associada ao gráfico de

$$g(t) = (e^t + e^{-t})/2$$

é uma curva conhecida designada por catenária. Exemplos de arcos de catenária podem ser vislumbrados em inúmeros contextos do nosso quotidiano, como pontes, teias de aranha, correntes dependuradas, etc (exemplos na página ao lado).

Concluimos, pois, que a estrada adequada a uma roda quadrangular é periódica, formada por cópias de arco de catenária que, nas junções, fazem um ângulo de $\pi/2$, onde cada vértice do quadrado encaixa perfeitamente (figs 2.55 e 2.56).

Neste capítulo, e porque estamos a estudar rodas de largura constante, elaborámos idêntico raciocínio para o caso de C ser um triângulo de Reuleaux (para detalhes matemáticos, consultar [CO]).

Detenhamo-nos na figura 2.74 onde L representa o comprimento dos raios dos arcos de circunferência constituintes do triângulo de Reuleaux (a azul) e d simboliza a distância do centro do triângulo aos seus vértices. Pelo Teorema de Pitágoras (generalizado), sobre o triângulo cinzento da figura 2.74, sabemos que

$$L^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(2\pi/3 - \Omega), \text{ com } -2\pi/3 \leq \Omega \leq 0.$$

Reescrevendo a fórmula anterior na variável θ ($\theta = -\Omega - \pi/2$) e tendo em conta que $\cos[x + \pi/2] = -\text{Sen}[x]$, para todo o x , obtém-se

$$r^2 + 2rd \text{ Sen}(2\pi/3 + \theta) + (d^2 - L^2) = 0.$$

Resolvendo a equação de 2º grau obtida em ordem a r e, sendo r positivo, vem

$$r = -d \operatorname{Sen}(2\pi/3 + \theta) + [d^2 \operatorname{Sen}^2(2\pi/3 + \theta) + (L^2 - d^2)]^{1/2}, [2.4]$$

com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/6$.

Na igualdade acima, L e d não são constantes independentes. Pelo Teorema de Pitágoras, deduz-se da figura 2.75 que $d^2 + d^2 - 2d^2 \operatorname{Cos}(2\pi/3) = L^2$ e, portanto, $d = L/\sqrt{3}$.

Para simplificação de cálculos, supomos, mudando o sistema de unidades se necessário, que $d=1$ e, consequentemente, $L = \sqrt{3}$. Substituindo estes valores na fórmula [2.4], obtém-se, para qualquer $\theta \in [-\pi/2, \pi/6]$, $r(\theta) = -\operatorname{Sen}(2\pi/3 + \theta) + [\operatorname{Sen}^2(2\pi/3 + \theta) + 2]^{1/2}$. [2.5]

Aplicando a fórmula geral [2.3], obtemos $\theta'(t) = d\theta/dt = [-\operatorname{Sen}(2\pi/3 + \theta(t)) + (\operatorname{Sen}^2(2\pi/3 + \theta(t)) + 2)^{1/2}]^{-1}$,

equação diferencial sem resolução imediata. Como θ' é contínua e $\theta'(t) \neq 0$, para todo o t , θ é função invertível e a equação anterior é equivalente a

$$dt = -\operatorname{Sen}(2\pi/3 + \theta(t)) + (\operatorname{Sen}^2(2\pi/3 + \theta(t)) + 2)^{1/2} d\theta,$$

o que podemos reescrever na seguinte forma:

$$t'(\theta) = -\operatorname{Sen}(2\pi/3 + \theta) + (\operatorname{Sen}^2(2\pi/3 + \theta) + 2)^{1/2}. [2.6]$$

Para primitivar $t'(\theta)$, tentámos usar *software* informático. A primeira operação consistiu, portanto, em encontrar uma função derivável T cuja derivada coincidissem com $t'(\theta)$, obtendo-se a seguinte expressão

$$T[\theta] = -\frac{\operatorname{Cos}[\theta]}{2} + \sqrt{3} \operatorname{EllipticE}\left[\frac{\pi}{6} + \theta, \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{2} \sqrt{3} \operatorname{Sin}[\theta]$$

Já nesta fase, o programa *Mathematica*¹, não sendo capaz de determinar uma expressão explícita para $t(\theta)$, recorreu a uma aproximação: $\operatorname{EllipticE}[\pi/6 + \theta, 1/3]$ é uma aproximação de um integral que é preciso calcular, mas que não tem primitiva elementar [Ri].

1 <http://www.wolfram.com>

À função deduzida anteriormente somámos uma constante ($-T(-\pi/2)$) de modo a garantir que $t(-\pi/2)=0$, i.e., $\theta(0)=-\pi/2$. Assim $t(\theta)$ é aproximadamente igual a $T(\theta)-T(-\pi/2)$

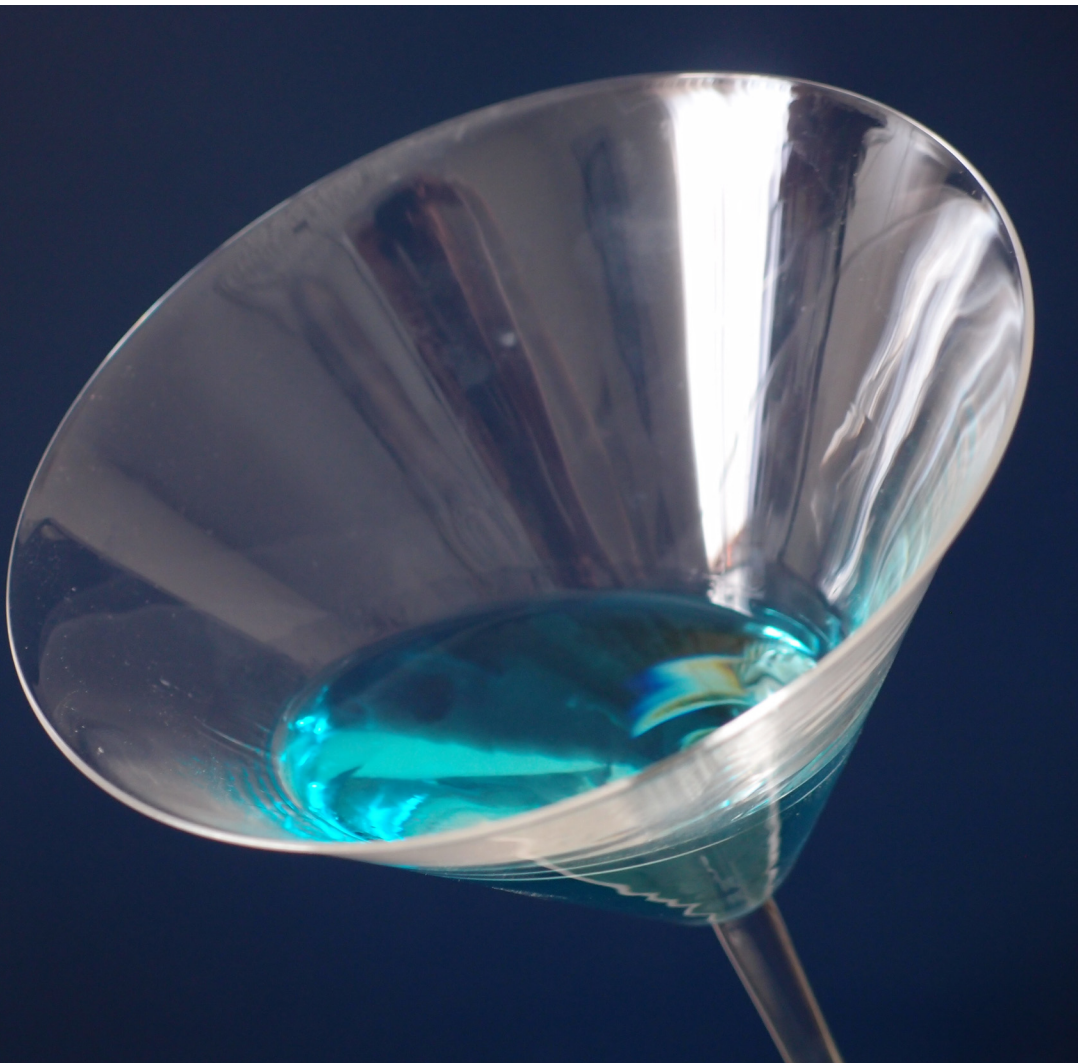
Na expressão final, t encontra-se escrito em função de θ . Como pretendemos θ em função de t , procurámos calcular a inversa de $t(\theta)$, o que nem o programa *Mathematica* conseguiu. Recorremos então a uma amostragem numérica para determinar uma aproximação da função θ : construímos uma lista de pontos da forma $(\theta, t(\theta))$, invertemos esta lista, obtendo uma nova lista de pontos da forma $(t(\theta), \theta)$, que interpolámos, calculando assim uma aproximação para a função θ .

A interpolação foi realizada com recurso ao comando do *Mathematica* "*Interpolation*", que, face a uma amostra finita de pontos, indica curvas polinomiais de grau inferior ou igual a 3 que se ajustam, por pedaços, a tais pontos.

Após determinarmos uma aproximação de θ , novamente por [2.3], calculámos uma aproximação de F , compondo r com θ e determinando o simétrico: $-r \circ \theta$.

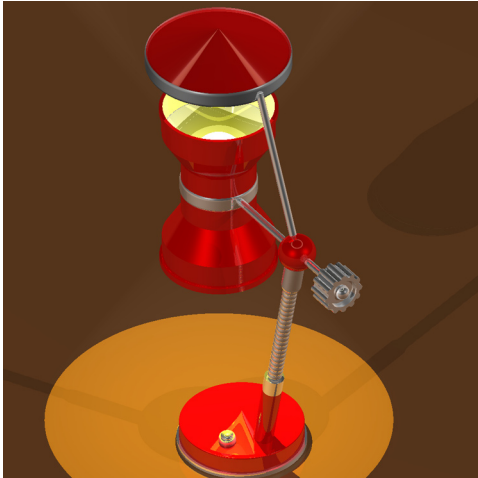
O uso de simulações numéricas tem a desvantagem de as aproximações impostas poderem conduzir a erros significativos na forma da estrada. Contudo, verificámos experimentalmente, recorrendo a animações que simulam o movimento da roda na estrada (fig 2.54), que os cálculos realizados nos conduzem a uma função F cujo gráfico corresponde a uma estrada adequada. É certo que não elaborámos um molde físico para testar a qualidade da estrada, no entanto, a dimensão das imagens utilizadas nas animações fazem-nos estar confiantes a este respeito.

03 Cónicas e bilhares

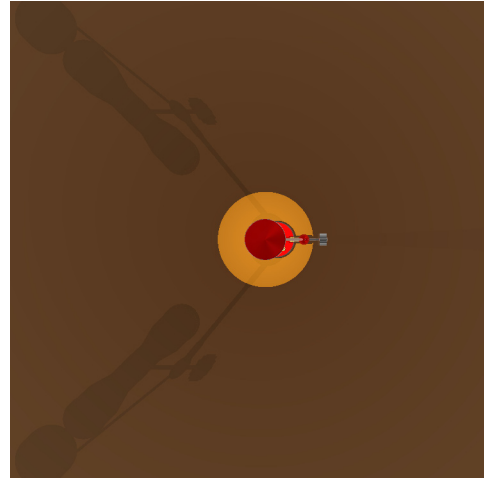


Secções

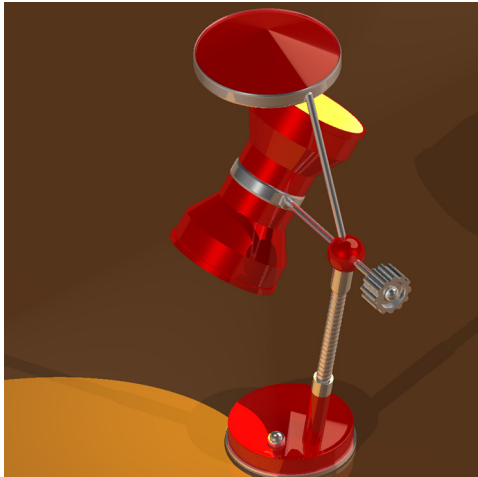
O que é uma cónica?
Descrição métrica
Definições equivalentes
Aplicações
Os módulos
Cónicas no dia-a-dia
Para saber mais



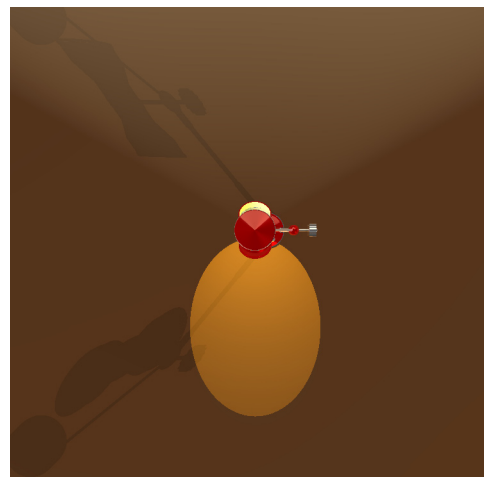
3.1



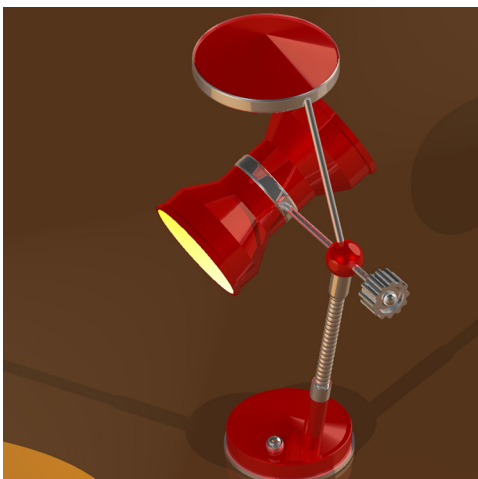
3.2



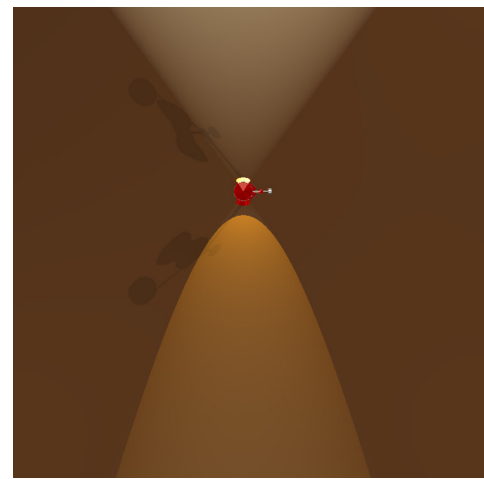
3.3




3.4



3.5

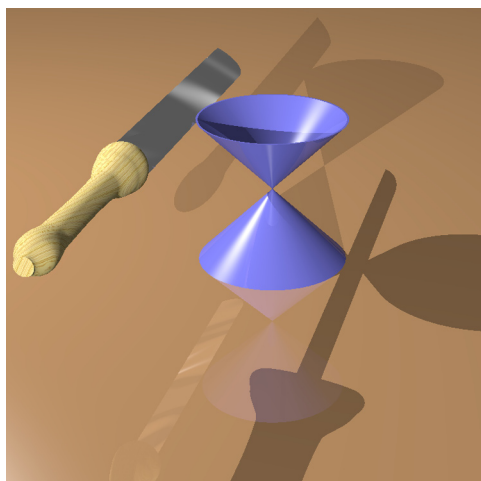


3.6

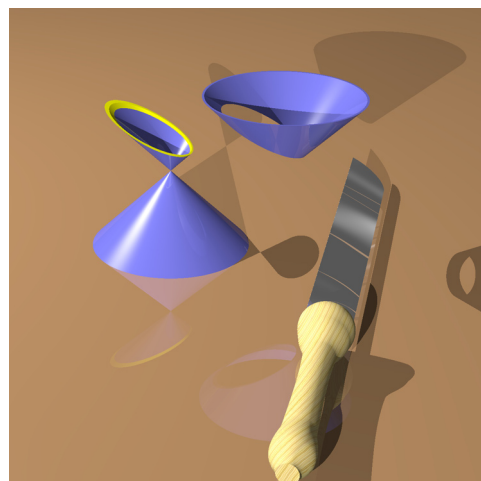


As imagens à esquerda documentam uma experiência envolvendo um jacto de luz projectado num plano e revelam um tipo de manchas de fronteira arredondada, cujo formato se parece com o da linha que delimita um líquido no interior de um copo ligeiramente inclinado. Inicialmente, é observável uma circunferência, que se alonga sucessivamente distanciando-se cada vez mais da forma original à medida que o foco se inclina relativamente ao plano. O objectivo destas experiências é obter esboços de um certo tipo de curvas: as *cónicas*. E é frequente, no nosso quotidiano, depararmo-nos com outras instâncias que nos conduzem, ainda que inadvertidamente, a aproximações dessas mesmas curvas.

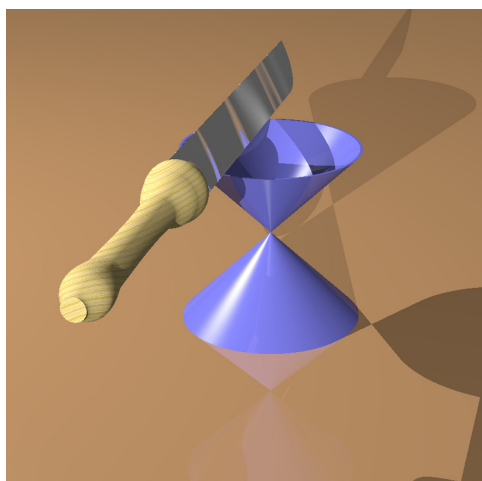
O intuito deste capítulo é estudar as cónicas quanto à sua génese e propriedades, baseando-nos, como temos procedido até agora, em alguns módulos da exposição Matemática Viva, mais concretamente, nos bilhares cónicos. Seguiremos contudo, uma abordagem ligeiramente diferente da dos capítulos anteriores: alongar-nos-emos um pouco mais na introdução, apresentando aspectos teóricos relevantes, que não foram ilustrados fisicamente naquela exposição.



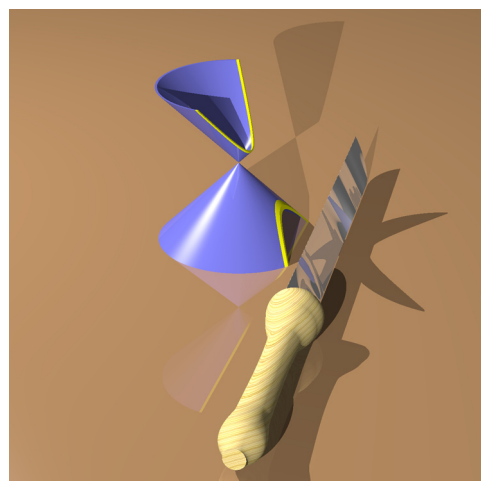
3.7



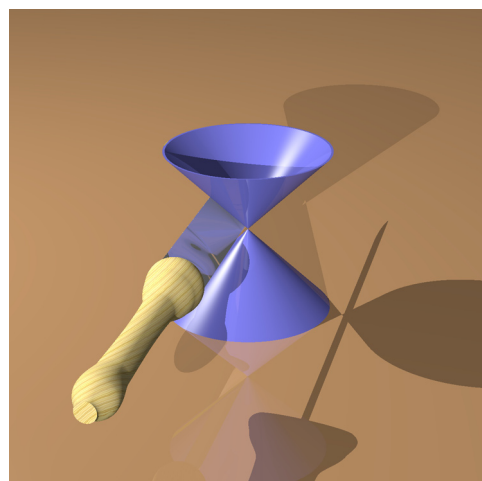
3.8



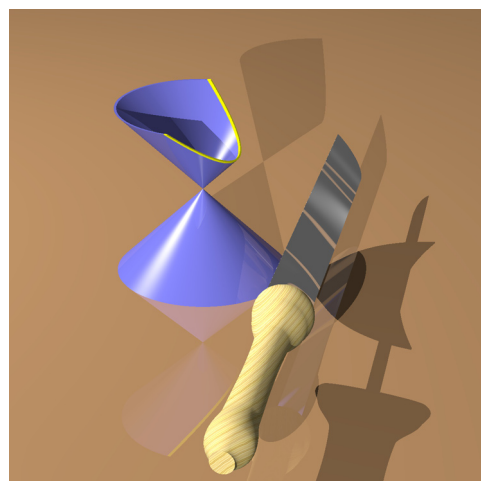
3.9



3.10



3.11



3.12

O que é uma cónica?

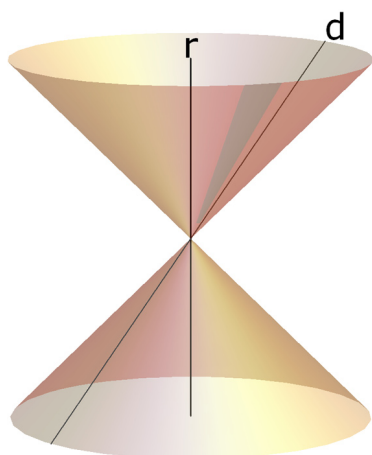


fig 3.13

Apolónio de Perga (Grécia, séc III-II a.C.), a quem devemos o primeiro estudo aprofundado sobre este tema, considerou um cone, seccionou-o a direito, dividindo-o assim em duas ou três partes (figs 3.7, 3.9 e 3.11) e analisou o tipo de bordo obtido. A ideia intuitiva aqui apresentada (figs 3.8, 3.10 e 3.12) pode ser formalizada matematicamente, definindo-se *cónica* como a curva resultante da intersecção de um cone com um plano. (Na referência [O3] podem ler-se mais informações sobre cónicas).

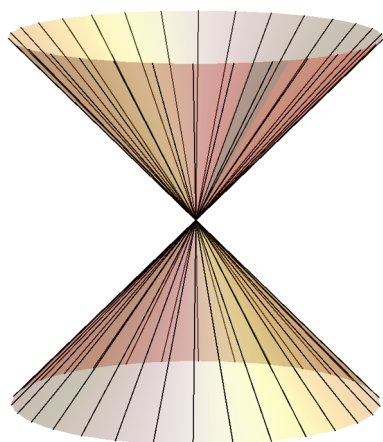


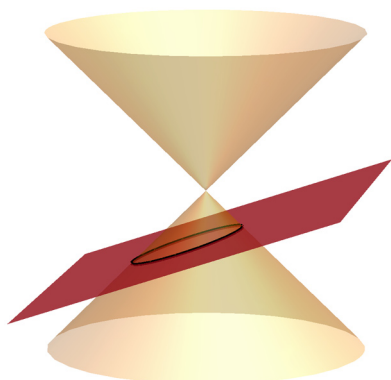
fig 3.14

Para obter todas as cónicas possíveis é suficiente considerar cones circulares duplos (fig 3.13), e ilimitados, figuras que podem ser geradas se tomarmos duas rectas concorrentes não perpendiculares, r e d , e rodammos, no espaço, a segunda em torno da primeira (fig 3.13). Diz-se que o cone foi gerado por *revolução* de d em r , sendo a recta d designada por *geratriz* e r por *eixo*. Note-se que d não é a única recta geradora do cone, existindo uma infinidade de outras geratrizes (fig 3.14): todas as rectas que se obtêm por rotação de d em torno de r .

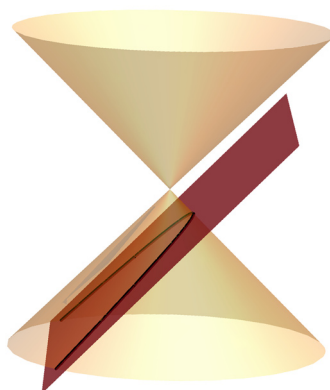
As situações das figuras 3.8, 3.10 e 3.12 ilustram as curvas que Apolónio obteve correspondentes a planos que não passam pelo vértice do cone. E se passarem? Veja-se a figura 3.15.

É a posição do plano que determina o tipo de cónica: o facto de ela ser ou não degenerada resulta apenas de o plano passar ou não pelo vértice do cone, e é o ângulo entre o eixo e o plano que condiciona o tipo de cónica resultante. De que modo?

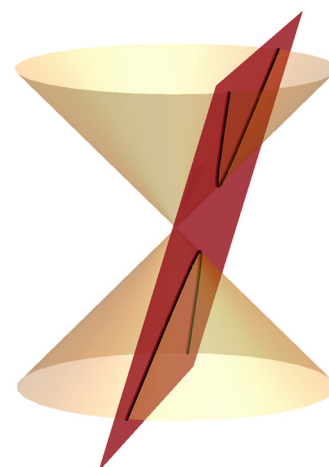
Cónicas não degeneradas



Elipse

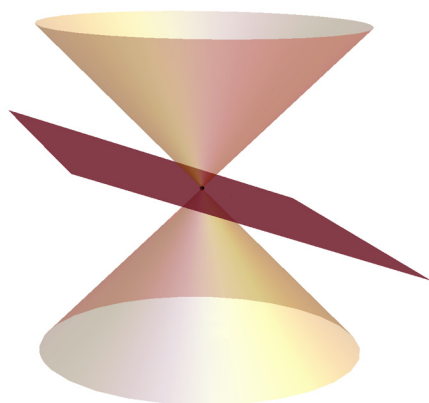


Parábola

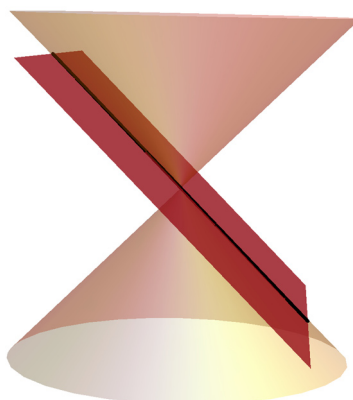


Hipérbole

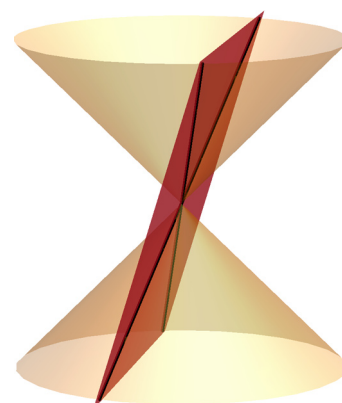
Cónicas degeneradas



Um ponto



Uma recta



Duas rectas

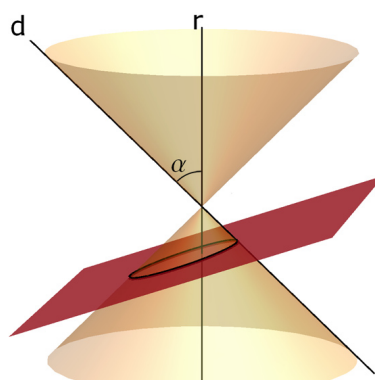


fig 3.16

Designemos por α a amplitude do ângulo entre o eixo e uma (qualquer) geratriz do cone e por β a amplitude do ângulo entre o eixo e o plano associado à cônica (figs 3.16 e 3.17). Uma cônica não degenerada diz-se:

- *elipse*, se $\alpha < \beta$,
- *parábola*, se $\alpha = \beta$,
- *hipérbole*, se $\alpha > \beta$.

Vejamos algumas das propriedades das cônicas não degeneradas.

Descrição métrica

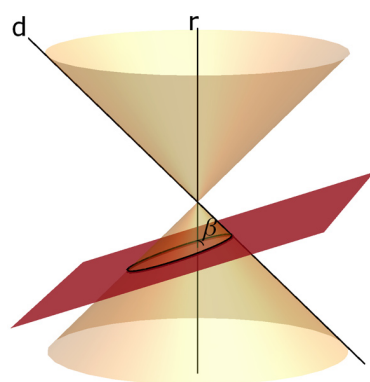


fig 3.17

O matemático belga G. P. Dandelin demonstrou que, dados uma cônica, um seu cone e um plano a ela associado (ρ), existem duas (e só duas) esferas simultaneamente tangentes ao cone e a ρ , se a cônica for uma elipse ou uma hipérbole, e uma só esfera tangente, se se tratar de uma parábola. Vejamos porquê.

Consideremos a elipse da figura 3.15 e sectionemos o cone e o plano ρ associado à elipse por um plano que passa pelo eixo do cone e é perpendicular a ρ . Obtemos algo como o ilustrado em 3.18, onde r é o eixo do cone e V o seu vértice.

Inscreve-se uma circunferência no triângulo $[VAB]$, com centro no seu incentro, o ponto de intersecção das bissetrizes (fig 3.19).

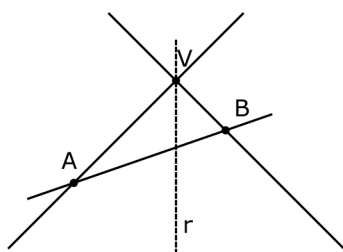
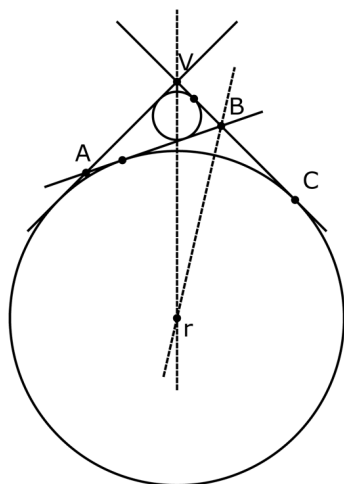
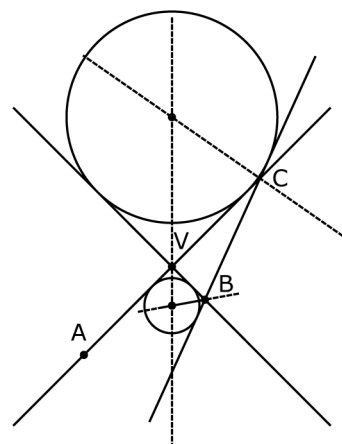


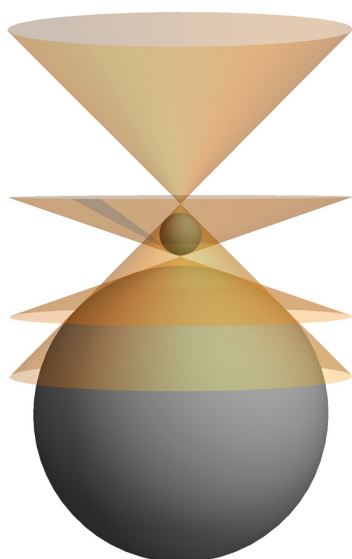
fig 3.18



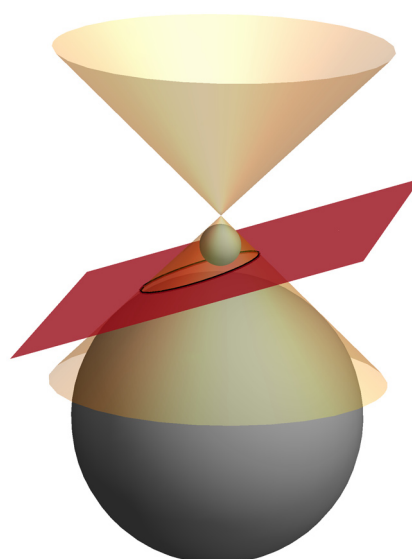
3.19



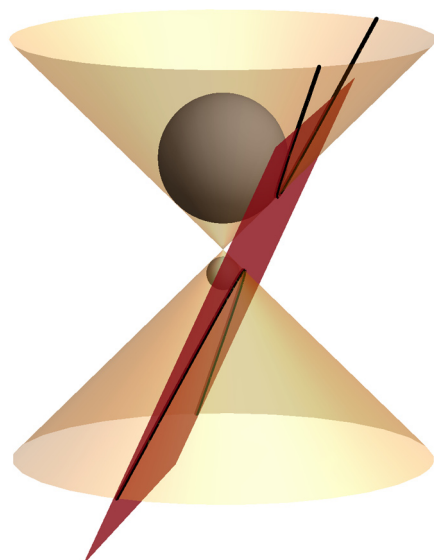
3.20



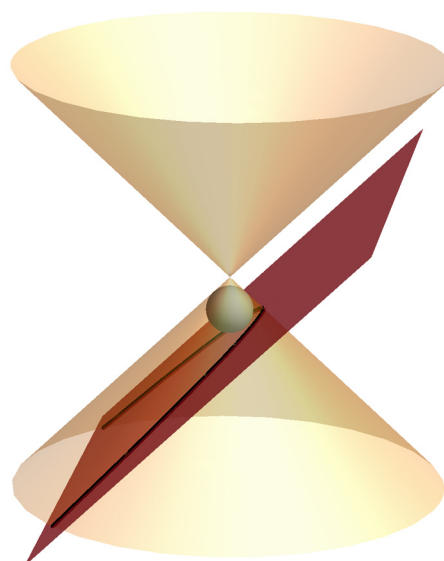
3.21



3.22



3.23



3.24

É ainda possível traçar uma segunda circunferência tangente às mesmas três rectas VA, VB e AB: a circunferência com centro no ponto de intersecção do eixo do cone com a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ (fig 3.19) e cujo raio é igual à distância entre esse ponto e uma (qualquer) das três rectas indicadas.

Por revolução destas rectas/circunferências em torno do eixo r , reconstruímos o cone inicial e obtemos ainda um cone que o intersecta (gerado por AB) e duas esferas tangentes a ambos os cones (fig 3.21). Obtemos assim duas esferas simultaneamente tangentes a ρ e ao cone inicial (fig 3.22). Dizem-se *esferas de Dandelin*, e os seus pontos de tangência com o plano ρ chamam-se *focos*¹: fig 3.26 (informação resumida sobre este tópico em [NS]).

Um raciocínio análogo ao anterior, para o caso da hipérbole, permite-nos determinar duas circunferências simultaneamente tangentes a VA, VB e BC (fig 3.20). Por revolução, geramos duas esferas (fig 3.23) tangentes ao cone e ao plano da hipérbole representada em 3.15.

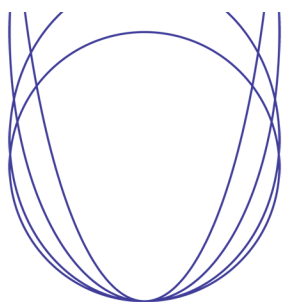


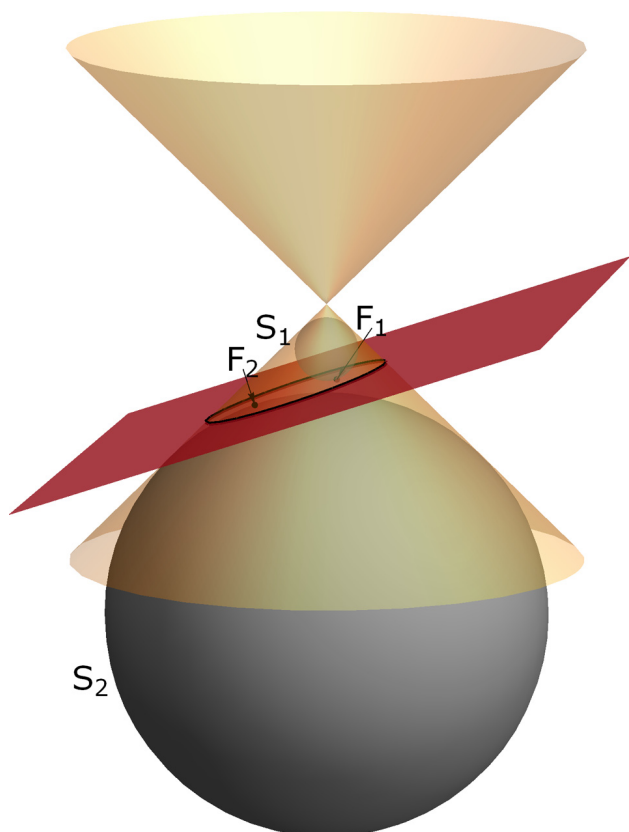
fig 3.25

E se a cônica for uma parábola? A única variação significativa relativamente aos casos anteriores é o facto de, aqui, não ser possível inscrever duas esferas tangentes, mas apenas uma (fig 3.24). Intuitivamente, podemos imaginar a parábola como uma elipse em que um dos focos se deslocou para infinito.

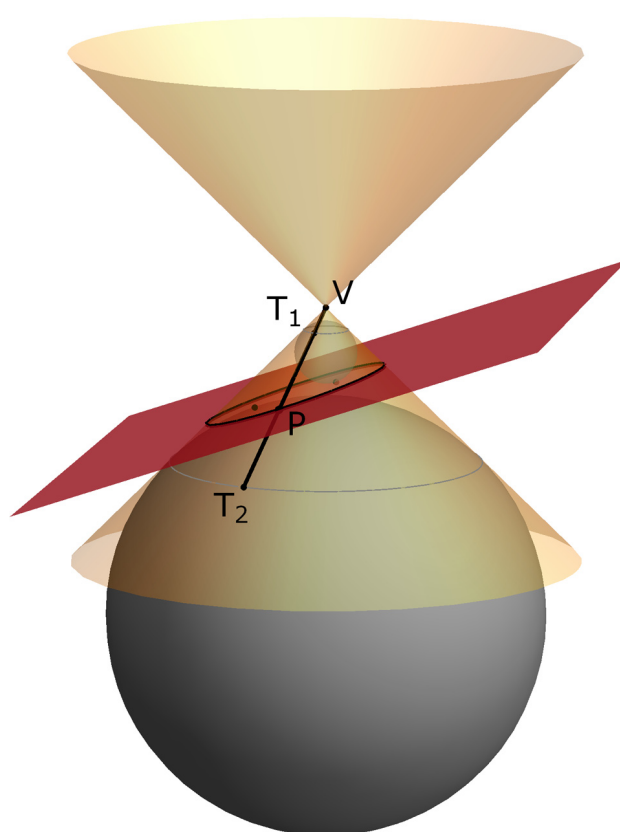
Questão: as curvas ao lado representam parábolas ou elipses com um dos focos muito distante?

Dados um cone, uma elipse de focos F_1 e F_2 e esferas de Dandelin S_1 e S_2 , consideraremos um ponto arbitrário P da elipse (figs 3.26 e 3.27).

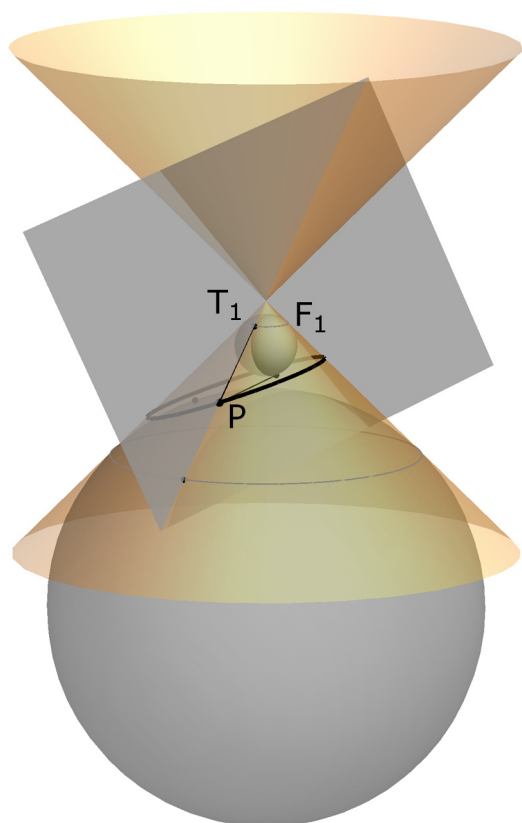
¹ Mais tarde, veremos que esta noção coincide com outra mais usual.



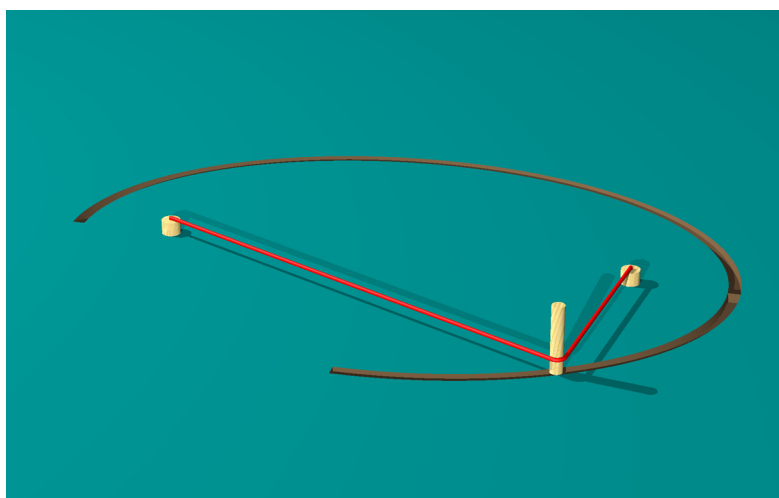
3.26



3.27



3.28



3.29

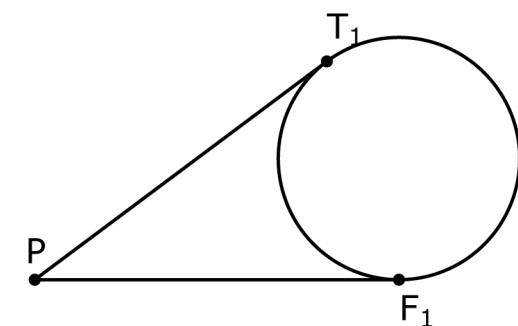


fig 3.30

Representemos por T_1 e T_2 os pontos de intersecção da semi-recta VP com as esferas de Dandelin (fig 3.27). Intersectando S_1 com o plano que passa por P , F_1 e T_1 (fig 3.28), obtemos uma circunferência. (Note-se que a intersecção de um plano com uma esfera pode ser: 1. vazia, 2. um ponto ou 3. uma circunferência; neste caso, pertencendo F_1 e T_1 à intersecção, ela terá de ser uma circunferência). Por outro lado, por S_1 ser tangente ao cone e ao plano da elipse, resulta que PF_1 e PT_1 são tangentes à circunferência encontrada (fig 3.30). Ora, *dados uma circunferência, um ponto externo P , duas rectas tangentes à circunferência que passam por P e os respectivos pontos de tangência, P dista o mesmo desses dois pontos* (fig 3.30). Daqui resulta que $|PF_1| = |PT_1|$ e, analogamente, $|PF_2| = |PT_2|$. Por conseguinte,

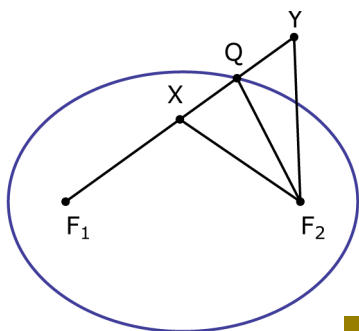
$$|PF_1| + |PF_2| = |PT_1| + |PT_2|.$$

Ora, $|T_1T_2| = |PT_1| + |PT_2|$ não depende do ponto P considerado, pelo que

$$|PF_1| + |PF_2| = k \quad \text{[3.1]}$$

para alguma constante positiva k . Ou seja, *a soma das distâncias dos pontos de uma elipse aos focos é constante*. Veremos seguidamente que esta propriedade caracteriza completamente as elipses e portanto poderia ser usada como definição destas curvas.

Esta caracterização fundamenta um método comum para contruir canteiros elípticos: a duas traves fixadas ao chão, prende-se um fio com comprimento superior à distância entre as traves; depois, com um pau, mantendo o fio bem esticado, desenha-se o rasto do pau no chão, esboçando assim uma elipse. A figura 3.29 ilustra este processo.



3.31

3.31 Seja k uma constante tal que, para todo o ponto P da elipse, $|PF_1| + |PF_2| = k$. Se X é ponto interior à elipse, $|XF_2| < |XQ| + |QF_2|$, logo

$$|F_1X| + |XF_2| < (|F_1X| + |XQ|) + |QF_2| = |F_1Q| + |QF_2| = k,$$

Analogamente, para um ponto Y exterior à elipse, temos $|QF_2| < |QY| + |YF_2|$, logo

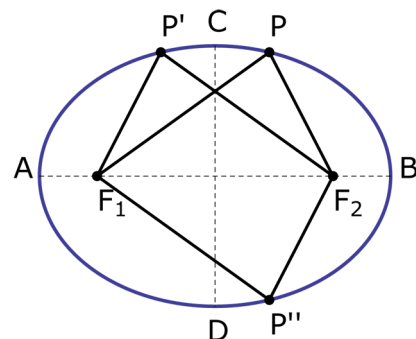
$$k = |F_1Q| + |QF_2| < |F_1Y| + |YF_2|,$$

Portanto, para todo o X não pertencente à elipse, $|XF_1| + |XF_2| \neq k$.

3.32 Sendo P um ponto da elipse, $|PF_1| + |PF_2| = k$, para alguma constante k . Se P' é o reflectido de P relativamente ao eixo vertical, $|PF_1| = |P'F_1|$ e $|PF_2| = |P'F_2|$, portanto,

$$|F_1P'| + |P'F_2| = |PF_2| + |F_1P| = k$$

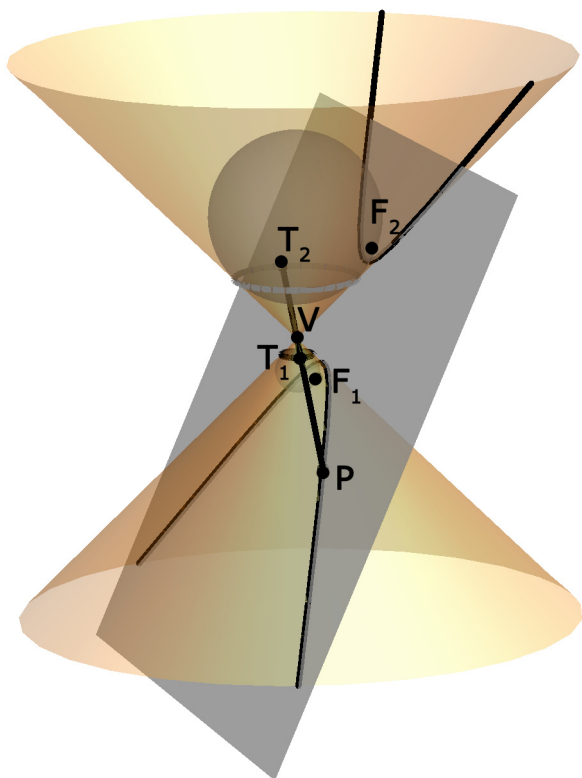
e P' é também um ponto da elipse. Do mesmo modo, sendo P'' o reflectido de P relativamente ao eixo horizontal, então $|F_1P''| + |P''F_2| = k$, logo, P'' também é um ponto da elipse.



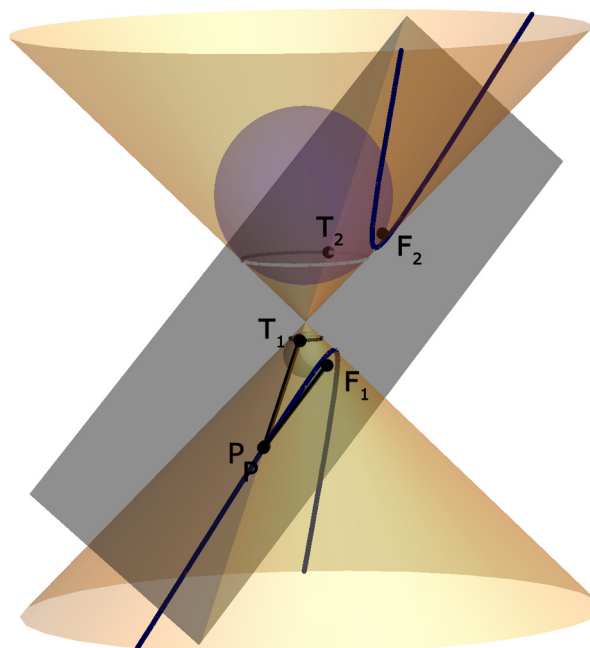
3.32

3.33 F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, P é um seu ponto arbitrário e V é o vértice do cone. Por T_1 e T_2 designamos os pontos de intersecção de VP com as duas esferas de Dandelin.

3.34 Temos $|PF_1| = |PT_1|$ e $|PF_2| = |PT_2|$.



3.33



3.34

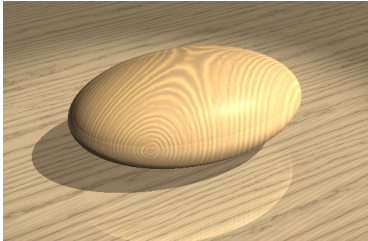


fig 3.35

A figura 3.31 indica por que motivo não existem outros pontos no plano que veriquem [3.1], embora eles existam no espaço, onde formam um *elipsóide* (fig 3.35).

Desta propriedade métrica da elipse, decorre, em particular, que qualquer elipse é limitada (está contida na circunferência de centro F_1 ou F_2 e raio igual à constante k) e possui dois eixos de simetria: a recta que passa pelos seus focos e a perpendicular à recta anterior pelo ponto médio dos focos (fig 3.32). Além disso, a elipse intersecta cada um dos seus eixos de simetria em dois pontos, respectivamente, A , B e C , D (fig 3.32), onde

$$\begin{aligned} |AB| &= k \\ |CD| &= \sqrt{k^2 - |F_1F_2|^2} \end{aligned}$$

Os segmentos que os unem são designados, respectivamente, por eixo maior e eixo menor da elipse.

Haverá alguma propriedade semelhante a [3.1] para a hipérbole? E para a parábola?

Consideremos uma hipérbole de focos F_1 e F_2 , um seu ponto arbitrário P , e T_1 , T_2 as intersecções de VP com as duas esferas de Dandelin (fig 3.33). Tal como anteriormente, concluímos que $|PF_1| = |PT_1|$ e $|PF_2| = |PT_2|$ logo,

$$| |PF_1| - |PF_2| | = | |PT_1| - |PT_2| | = |T_1T_2|.$$

Portanto, existe uma constante positiva k tal que

$$| |PF_1| - |PF_2| | = k, \quad [3.2]$$

para todo o ponto P da hipérbole (fig 3.34).

Esta propriedade permite-nos, em particular, concluir que a hipérbole também possui dois eixos de simetria: a recta que passa pelos seus focos e a perpendicular à linha anterior passando pelo ponto médio dos focos (fig 3.36).

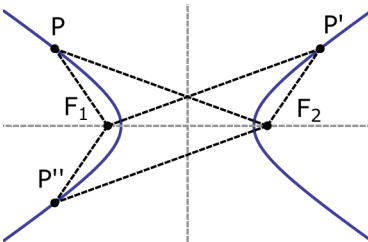
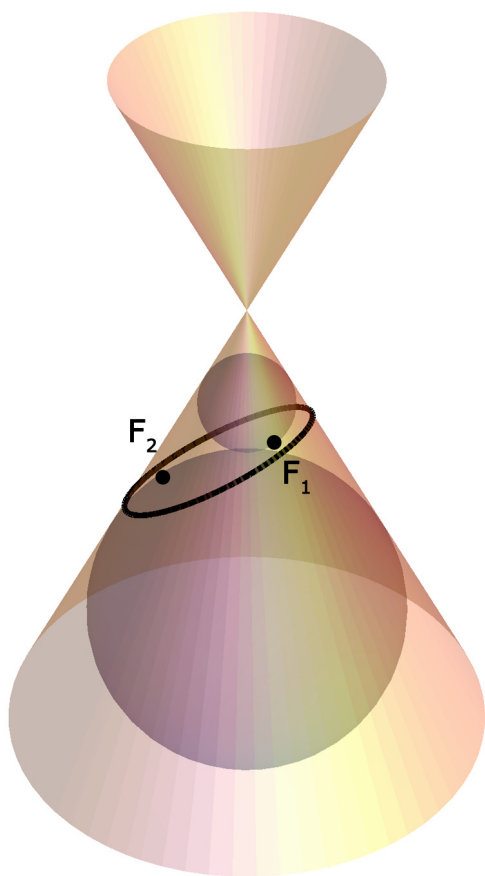
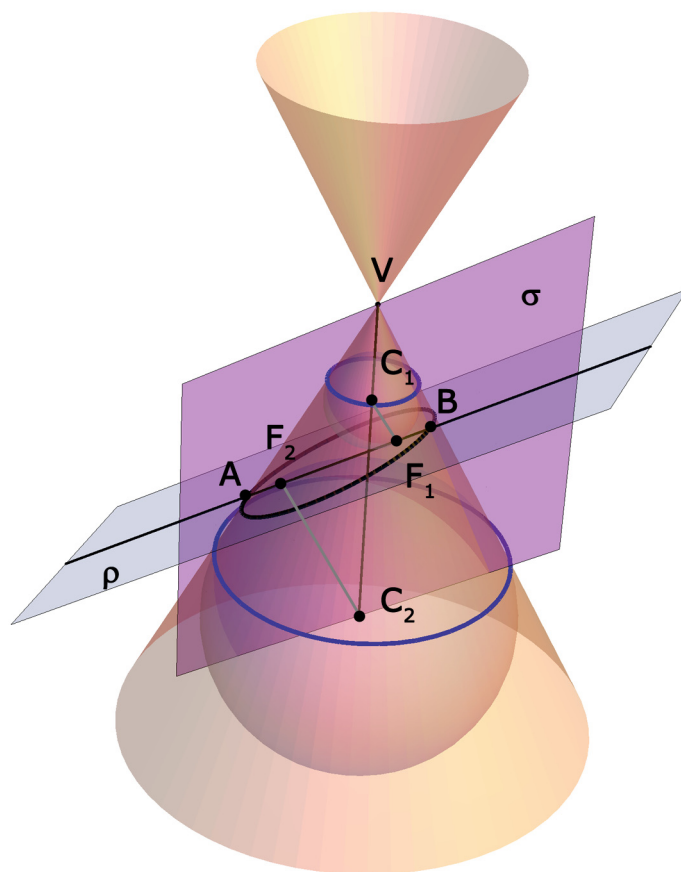


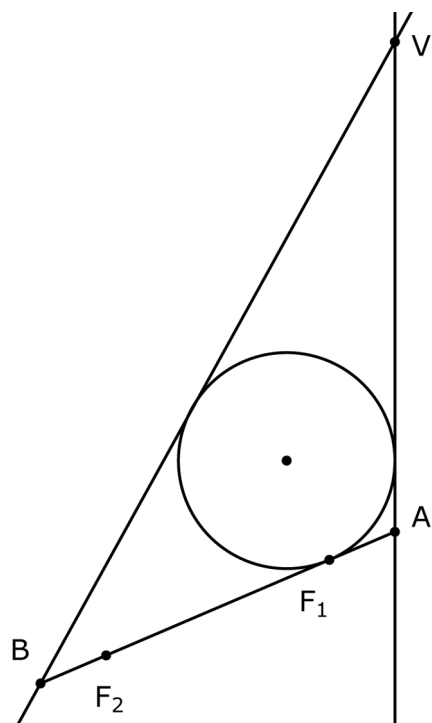
fig 3.36



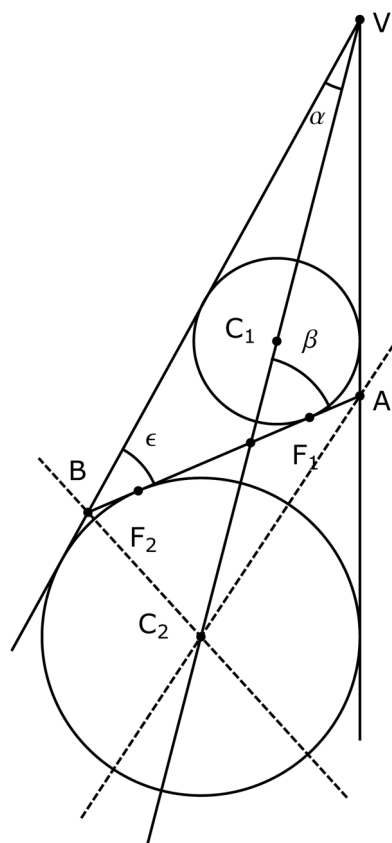
3.37



3.38



3.39



3.40

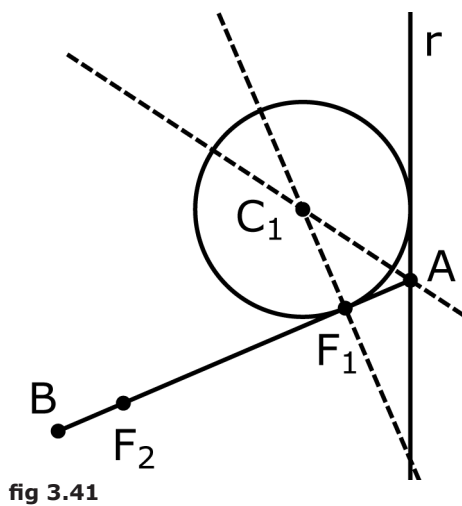


fig 3.41

Definições equivalentes

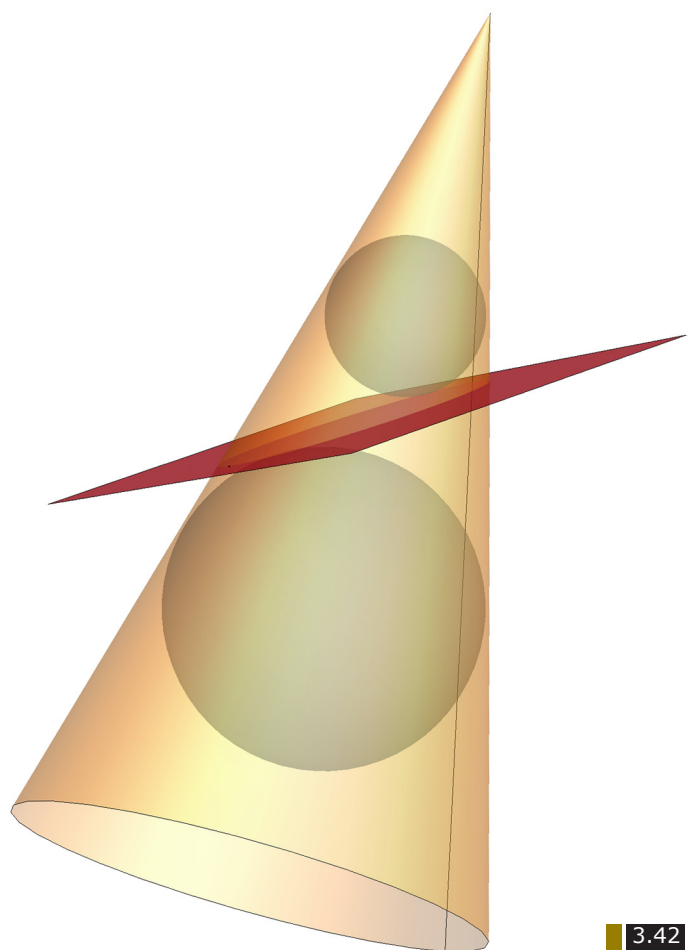
É frequente os autores de textos sobre cónicas optarem pela definição de Apolónio para a elipse/hipérbole e, quando fazem depois uso da descrição métrica, não referirem (por) que são modos equivalentes de tratar estas curvas. Vimos já que [3.1] (resp. [3.2]) é uma consequência da definição de elipse (resp. hipérbole). Provemos que o recíproco também é válido.

Para esclarecermos por que é que uma curva plana que satisfaça a igualdade [3.1] é uma elipse, fixemos um plano ρ , dois pontos F_1 e F_2 nesse plano, uma constante k , estritamente maior que $|F_1F_2|$, e o conjunto $\mathcal{D} = \{P \in \rho: |PF_1| + |PF_2| = k\}$. Temos agora de encontrar um cone \mathcal{C} que permita obter \mathcal{D} como intersecção de ρ com \mathcal{C} e cujas esferas de Dandelin, de centros C_1 e C_2 , sejam tangentes a ρ em F_1 e F_2 (fig 3.37). Note-se que, se um tal cone existir, deverá intersectar a recta F_1F_2 em dois pontos A e B (fig 3.38) tais que

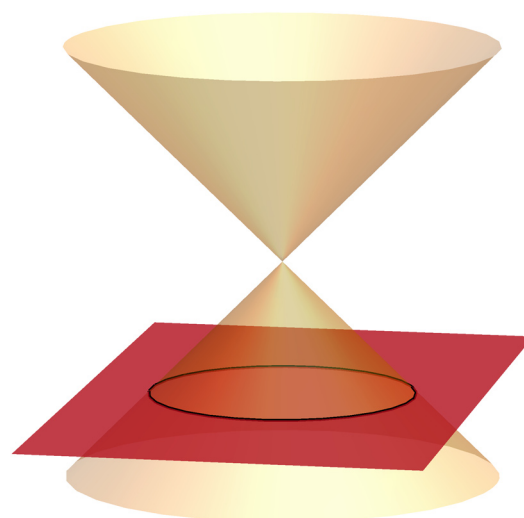
$$|AF_1| = |BF_2| = \frac{k - |F_1F_2|}{2} \text{ e } |AB| > |F_1F_2|.$$

Uma vez que procuramos um cone de revolução, começemos por diminuir a dificuldade do problema, reduzindo-o à procura de um plano que contenha o seu vértice e uma geratriz. Para isso, basta construir um plano σ contendo AB e perpendicular a ρ (fig 3.38).

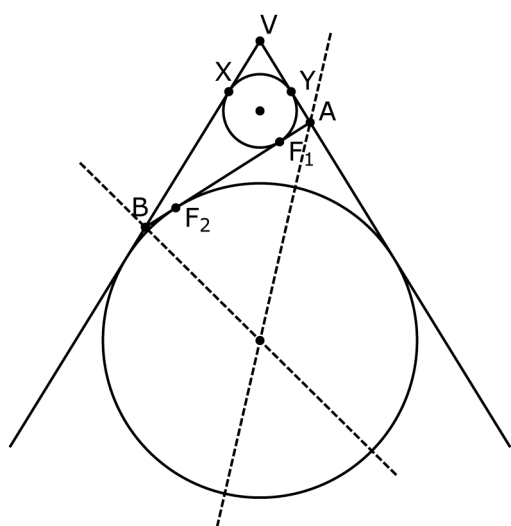
Construamos agora a intersecção do cone (e respectivas esferas de Dandelin) com σ . Escolhamos uma recta $r = AV$ em σ ; sabemos que C_1 coincide com o centro da circunferência tangente a r e a AB em F_1 , como indicado na figura 3.41. O facto de a recta BV dever ser também tangente à circunferência representada permite-nos determiná-la (e isso está feito na figura 3.39). Por outro lado, a segunda esfera de Dandelin intersecta σ numa outra circunferência tangente às três rectas assinaladas, conforme indica a figura 3.40, e o seu ponto de tangência com AB é F_2 .



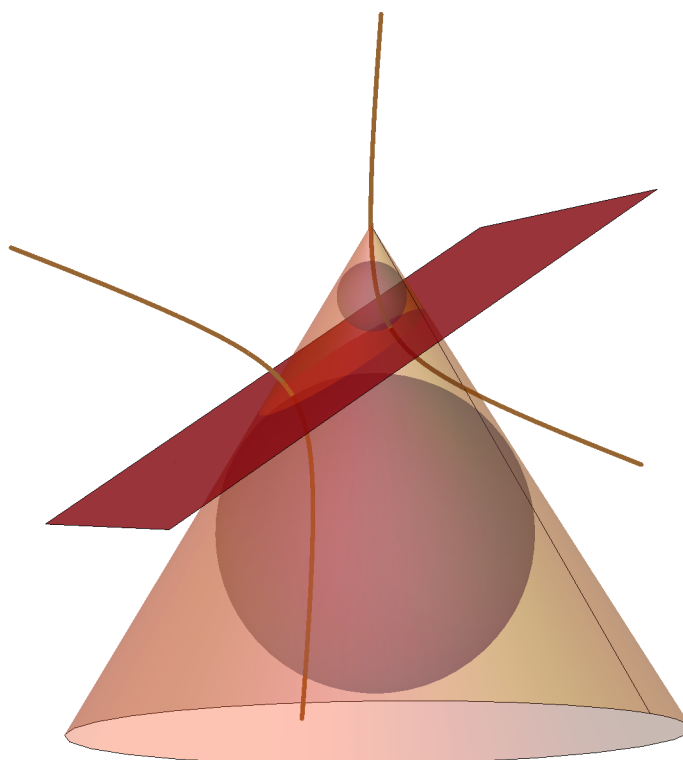
3.42



3.43



3.44



3.45

Observemos ainda, no triângulo BAV (fig 3.40), que a inclinação do plano ρ é

$$\beta = \varepsilon + \alpha > \alpha$$

condição essencial para se obter uma elipse. Por fim, e por revolução em torno de C_1C_2 , geremos um cone. O resultado está na figura 3.42 e confirma que o conjunto \mathcal{D} é uma elipse.

De modo análogo, é possível verificar a equivalência entre a definição de Apolónio de hipérbole e [3.2].

Será que o cone que construímos é único? Não esperamos que o seja pois, no argumento anterior, fizemos uma escolha: a recta r . De facto, variando r , obtemos uma infinidade de cones possíveis, de que se exhibe um outro exemplo na figura 3.45. Como se relacionam os diferentes cones que intersectam ρ segundo a mesma elipse?¹ Tendo em conta a igualdade (ver fig 3.44)

$$\begin{aligned} | |BV| - |AV| | &= | |BX| + |XV| - |AY| - |YV| | = \\ &= | |BF_1| + |XV| - |AF_1| - |YV| | \end{aligned}$$

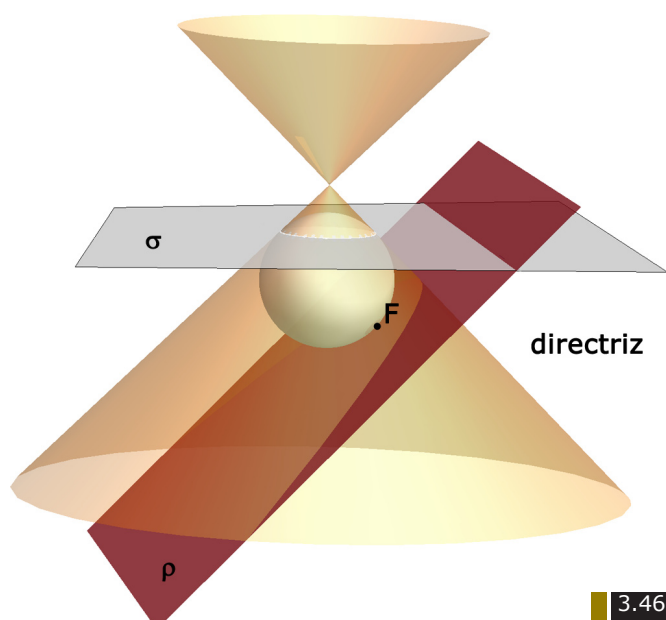
e a congruência de $[XV]$ e $[YV]$, que resulta de VX e VY serem tangentes, em X e em Y , à mesma circunferência, concluímos que

$$| |BV| - |AV| | = | |BF_1| - |AF_1| | = |F_1F_2|$$

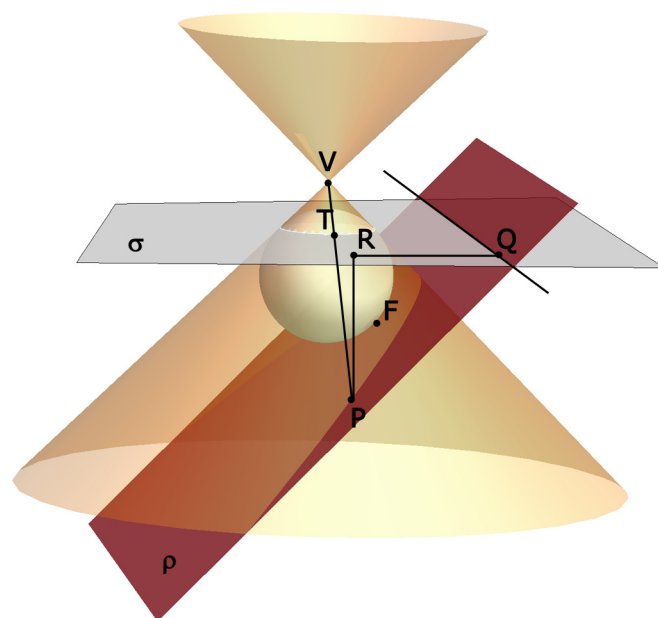
Esta condição permite-nos concluir por [3.2] que, já sabemos, é equivalente, à definição de Apolónio de hipérbole) que V descreve um arco de hipérbole com focos B e A e constante $|F_1F_2|$. Está traçada a castanho na figura 3.45.

A caracterização métrica das elipses indica que a circunferência é um caso particular de elipse em que o plano associado à cónica é perpendicular ao eixo do cone (fig 3.43), e em que os dois focos coincidem. A constante em [3.1] é o diâmetro da circunferência.

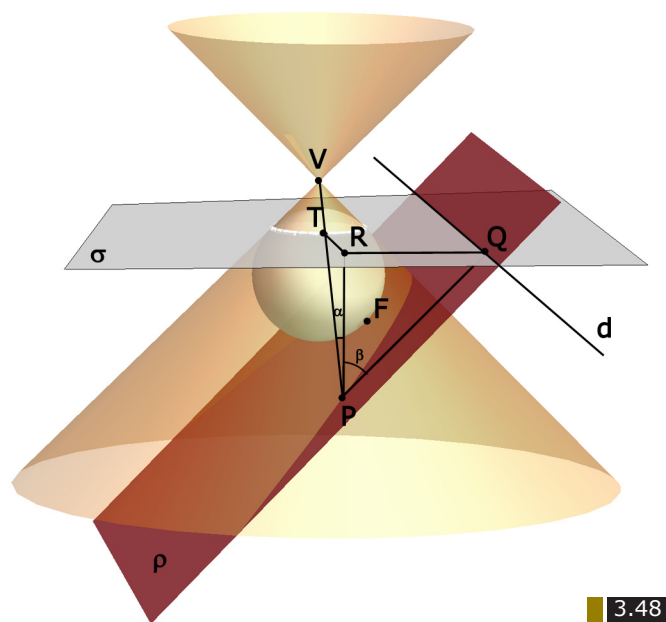
¹ A primeira referência que possuímos sobre este problema remonta a [L].



3.46



3.47



3.48

3.46 A parábola tem apenas uma directriz. A elipse e a hipérbole têm duas, uma por cada foco.

3.47 Por analogia com 3.27, foram marcados V , o vértice, P , um ponto arbitrário da parábola, e T , a intersecção de VP com a esfera de Dandelin. O ponto R é tal que PR é perpendicular a σ e RQ é a recta de σ perpendicular à directriz da parábola.

3.48 Os triângulos $[PRT]$ e $[PRQ]$ são congruentes e $|PT| = |PQ|$.

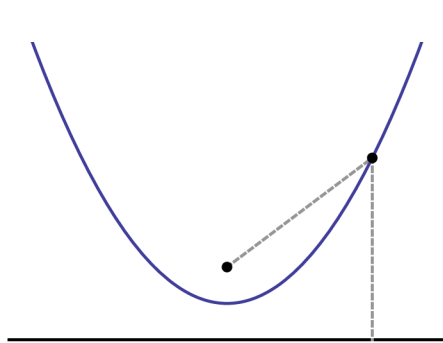
Haverá alguma propriedade métrica caracterizadora da parábola? A existir, não será nos moldes indicados anteriormente, já que a parábola possui apenas um foco. Neste caso, não é a distância de um dado ponto a outros dois (os focos) que é relevante, mas sim a relação entre a distância de um qualquer seu ponto respectivamente ao foco e a uma recta especial - a *directriz*: dados uma cónica e um seu foco F , consideremos o plano ρ da cónica e a esfera de Dandelin correspondente. Tal esfera intersecta o cone numa circunferência que por sua vez, se encontra contida num plano σ (fig 3.46). A directriz, que designaremos por d , é a intersecção de ρ e σ (fig 3.46).

Tal como procedemos anteriormente, tomemos um ponto da parábola, P , e T , o ponto de intersecção de VP com a esfera de Dandelin (fig 3.47). Designemos por R a projecção ortogonal de P em σ e por Q a projecção, em σ , de P na directriz da parábola.

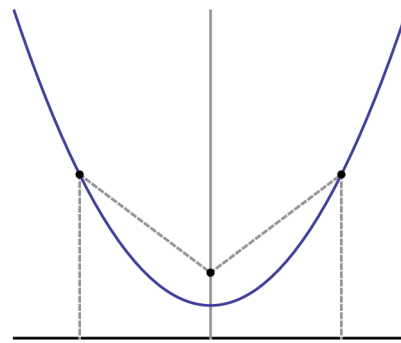
Por construção, RP é perpendicular a σ , pelo que $[PQR]$ e $[PTR]$ são triângulos rectângulos em R e PR é paralelo ao eixo do cone (fig 3.48). Portanto, a amplitude de $\angle RPT$ é α (a amplitude do ângulo entre a geratriz e o eixo do cone). Acresce que, por definição, d é perpendicular a PQ e a PR (note-se que PR é perpendicular a σ). Estas condições levam-nos a garantir a perpendicularidade entre ρ e PQR e, portanto, a amplitude de $\angle RPQ$ é β . Sendo a cónica em causa uma parábola, temos $\alpha = \beta$ e os triângulos rectângulos $[PQR]$ e $[PTR]$ têm os ângulos internos iguais e possuem um cateto comum. Deduz-se então que $|PQ| = |PT|$.

Como vimos na figura 3.28, também temos $|PT| = |PF|$, pelo que $|PF| = |PQ|$. Conclui-se assim que *a distância de qualquer ponto da parábola à directriz é igual à distância desse mesmo ponto ao foco*. Esta é também uma condição definidora de parábola.

Como corolário, a parábola possui um (único) eixo de simetria, que passa pelo foco e é perpendicular à directriz (fig 3.50).



3.49



3.50



3.51

Em 3.49 e 3.50, está representado o único eixo de simetria da parábola.

Em 3.51, 3.52, encontram-se fotografias correspondentes à projecção, no chão, da sombra da ponta de um gnómon, numa tarde de Agosto de 2012, em Vila do Conde.



3.52

Aplicações

A relevância das cônicas é reconhecida desde a Antiguidade Grega. Por curiosidade, refira-se uma lenda segundo a qual o matemático grego Arquimedes (III a.C.) destruiu navios romanos usando espelhos parabólicos, que canalizaram a radiação solar para o mar, incendiando os navios ([CG]).

A importância da parábola foi, contudo, evidenciada no século XVII, quando Galileu demonstrou ser parabólica a trajetória de um projétil. A elipse surge na resolução matemática de um problema de Astronomia: Kepler descobre que a órbita de Marte é uma elipse, enunciando posteriormente a lei segundo a qual *todos os planetas do sistema solar percorrem órbitas elípticas, com um dos focos no Sol*. Em 1687, Newton enuncia, na sua obra *Principia Mathematica*, que as três cônicas descrevem todas as órbitas possíveis de um corpo que se mova sob a atração gravitacional de uma só massa, como o Sol (ver [CG]).

Uma curiosidade relacionada com o que vimos é a trajetória da sombra na Terra da ponta de uma haste vertical, um *gnómon*, (figs 3.51, 3.52). A ponta do gnómon descreve, com o movimento do Sol nesse dia, uma curva no chão cuja forma depende apenas da latitude do local e da estação do ano (ver [J]), sendo a curva desenhada, abaixo do Círculo Polar Ártico, sempre uma hipérbole (consultar [Wi]).

No solstício de Verão, para além da hipérbole (abaixo do Círculo Ártico), são desenhadas uma parábola e uma elipse, respectivamente, no Círculo Ártico e acima deste (mais informação em [Wi]).

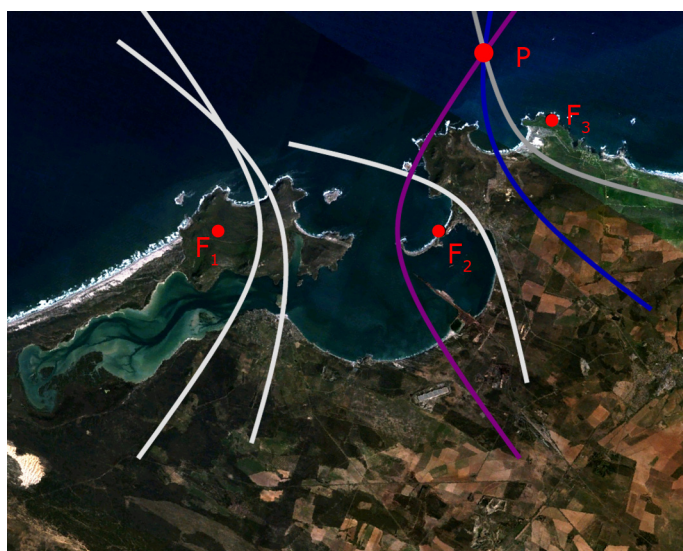


3.54 Como descobrir a localização da terra a partir de um barco situado na posição P?

3.54

3.55 Recorrendo a um mapa, e conhecendo a localização de F_1 e F_2 através da frequência das ondas que recebe, o marinheiro (situado em P) pode determinar uma linha hipérbolica, na qual se encontra posicionado.

3.55



3.56 Com o conhecimento adicional da posição de uma terceira estação de rádio F_3 , o marinheiro possui dados suficientes para determinar a posição do seu barco.

3.56

As propriedades das cónicas são actualmente exploradas em numerosas áreas e em domínios aparentemente alheios à Matemática. A título de exemplo, refira-se que a propriedade [3.2] sobre a hipérbole é a base de um sistema de radio-navegação desenvolvido durante a Segunda Guerra Mundial e ainda em uso: o sistema LORAN (LONg RANge Navigation).

Como é que um marinheiro, num barco perdido no mar, poderá descobrir a sua localização?

Suponhamos que o barco, situado na posição P , recebe sinais de duas estações de rádio distintas localizadas em F_1 e F_2 (fig 3.54). Representando por t_1 e t_2 os intervalos de tempo entre a emissão do sinal, em F_1 e F_2 , e a sua recepção no barco, a distância de P às estações é, respectivamente, vt_1 e vt_2 , designando por v a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas. Há, no entanto, um problema: o marinheiro não tem como medir t_1 e t_2 . Contudo, o marinheiro pode registar o intervalo de tempo compreendido entre a recepção dos dois sinais, Δ_1 . Além disso, F_1 e F_2 emitem em instantes fixados e conhecidos previamente por todos os marinheiros, logo, o navegador perdido conhece $\Delta_1 = |t_2 - t_1|$. Como,

$$||PF_2| - |PF_1|| = v \Delta_1,$$

P é um ponto de uma hipérbole perfeitamente determinada (fig 3.55).

Os dados indicados, por si só, não são suficientes para encontrar o ponto P - uma hipérbole contém uma infinidade de pontos. Porém, se os cruzarmos com a informação obtida a partir de uma terceira estação de rádio, F_3 , resolvemos o problema proposto: P corresponde ao ponto de intersecção de três hipérbolas (fig 3.56), determináveis num mapa a partir de três valores (Δ_1 , Δ_2 e Δ_3) e dos três pares de focos (F_1, F_2), (F_1, F_3) e (F_2, F_3).



- 3.57 O bilhar elíptico tem um buraco num dos focos da elipse. Uma bola colocada no segundo foco e atirada em qualquer direcção deverá ir cair no buraco.

3.57

- 3.58 O bilhar parabólico tem uma das tabelas formada por um arco de parábola e tem um buraco no foco da parábola. Uma bola atirada paralelamente às tabelas laterais (isto é, na direcção do eixo da parábola) deverá ir parar ao buraco.



3.58



- 3.59 O bilhar hiperbólico tem uma tabela em forma de ramo de hipérbole. O outro ramo da hipérbole está desenhado. No foco correspondente a este ramo há um buraco e o foco correspondente à hipérbole-tabela, está apenas marcado na parte superior. Uma bola atirada na direcção do foco de cima deverá ir parar ao buraco.

3.59

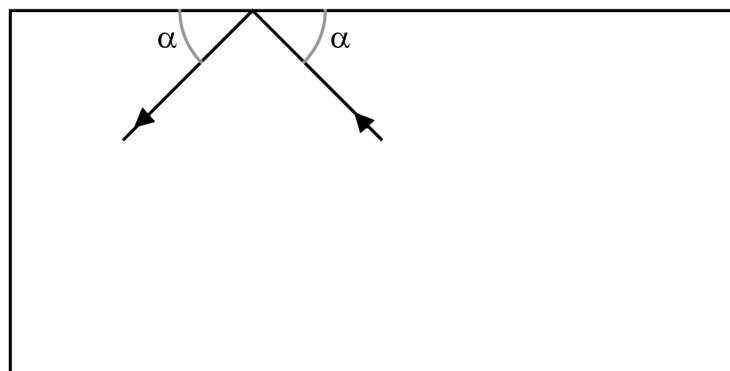
Os módulos

Baseando-se num jogo de grande popularidade, o bilhar, na exposição Matemática Viva, foram adaptadas mesas de jogo convencionais, por forma a porem em evidência propriedades das três cónicas (figs 3.57, 3.58 e 3.59). À primeira vista, as três mesas da exposição poderiam parecer versões reduzidas do bilhar tradicional, mas observando-as pormenorizadamente, reparamos que os seus bordos têm a forma, respectivamente, de uma elipse, parte de uma parábola e parte de uma hipérbole (consultar [Cr]).

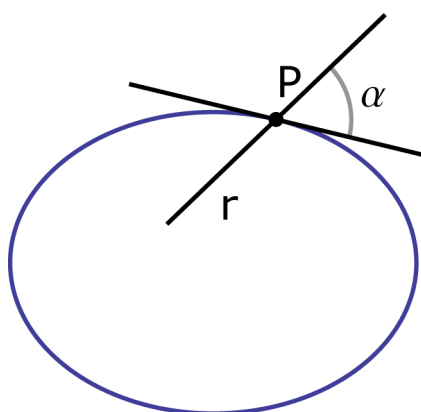
No bilhar elíptico (fig 3.57), o visitante é convidado a colocar a bola num foco, assinalado a branco, e a lançá-la em qualquer direcção. Experimentalmente, o visitante é confrontado com o facto de, independentemente da direcção escolhida, a bola cair sempre no (único) buraco, situado no outro foco.

Experiências semelhantes são propostas para os restantes bilhares: no parabólico (fig 3.58), o lançamento da bola paralelamente às linhas laterais culmina na entrada da bola no buraco e, no caso da hipérbole (fig 3.59), colocando a bola num qualquer ponto e apontando para o foco assinalado a branco, é certa a entrada da bola no buraco, localizado no outro foco. Que propriedades matemáticas explicam tal regularidade nos resultados dos lançamentos?

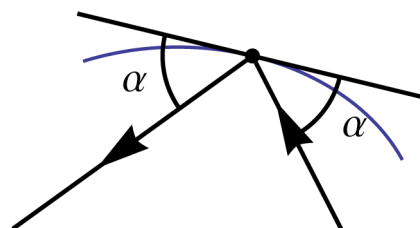
Num bilhar de bordo rectangular, o ângulo com que uma bola incide na parede lateral da mesa é igual ao ângulo com que é reflectida (fig 3.60). É possível generalizar esta propriedade a bilhares não rectilíneos, mas coloca-se um problema: o próprio conceito de ângulo.



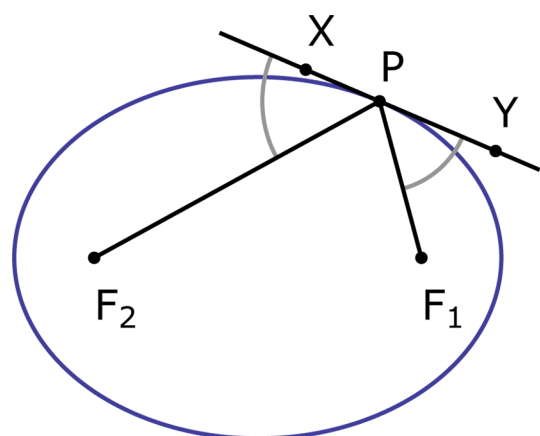
3.60



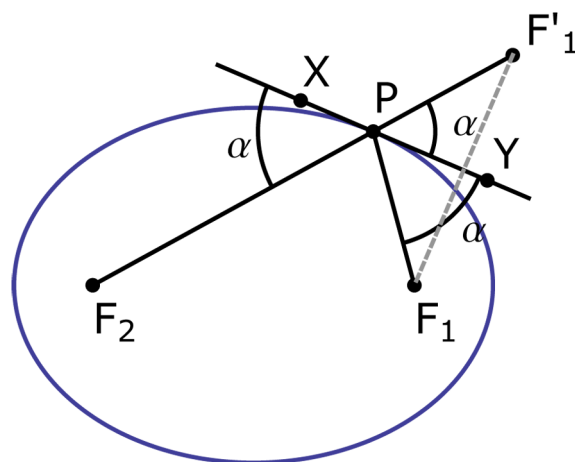
3.61



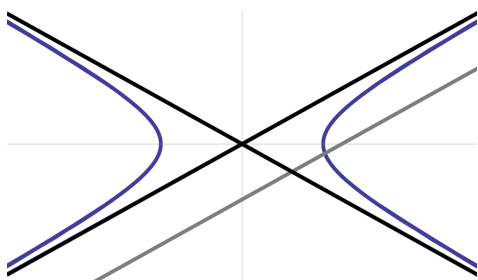
3.62



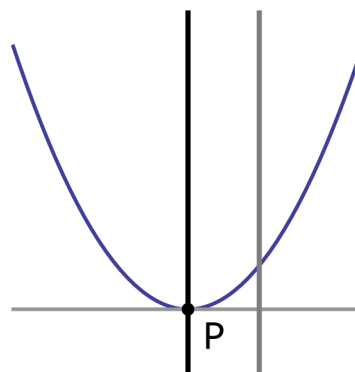
3.63



3.64



3.65



3.66

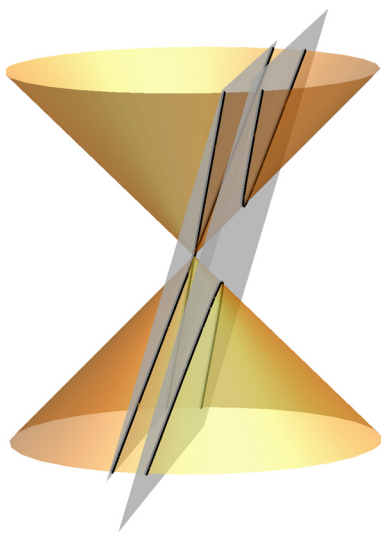


fig 3.67

Designaremos por ângulo entre uma cônica e uma recta, num ponto de intersecção de ambas, o menor ângulo compreendido entre a recta e a tangente à cônica nesse ponto (fig 3.61). Esta noção de ângulo é aplicável porque as cónicas admitem, para todos os seus pontos, uma recta tangente (detalhes em [Bk]).

Aprendemos em Física que a reflexão da luz ou do som numa superfície curva diferenciável depende de duas leis gerais:

- o raio incidente, a recta tangente e o raio reflectido são coplanares;
- o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão (fig 3.62).

As leis enunciadas são ainda válidas para a trajectória de uma bola num bilhar (fig 3.60).

Qualquer recta apenas intersecta uma cônica em um ou dois pontos. Acresce que, se a intersecção se cingir a dois pontos, a recta é secante à cônica; e, se a intersecção se resumir a um ponto, podem ocorrer três cenários (consultar [J]):

- a recta é tangente à cônica,
- a recta é paralela ao eixo, se a cônica for uma parábola (fig 3.66).
- a recta é paralela a uma das duas assíntotas (assinaladas a preto na figura 3.65), se a cônica for uma hipérbole.

Note-se que a assíntota de uma hipérbole é uma das rectas obtidas intersectando o cone pelo plano, paralelo ao plano da hipérbole e passando pelo vértice, e depois transladando-as por forma que o seu ponto de intersecção coincida com o ponto médio dos focos da hipérbole (fig 3.67).

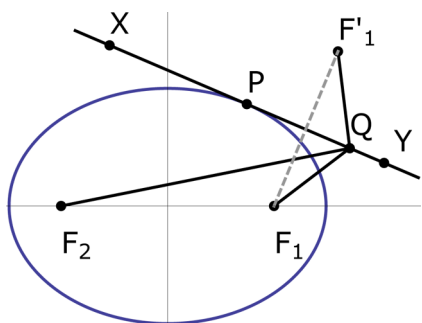


fig 3.68

Comecemos a nossa análise dos bilhares pelo elíptico (figura 3.63) tomando um seu ponto P e a recta XY, onde X e Y são pontos situados em lados opostos relativamente a P e tais que as amplitudes de $\angle XPF_2$ e $\angle F_1PY$ coincidam (fig 3.63).

O ponto P tem uma propriedade notável: o caminho $F_1 \rightarrow P \rightarrow F_2$ une os pontos F_1 a F_2 , passa por XY e é o caminho mais curto que satisfaz estas duas condições. Este percurso mínimo mede $|F_2F'_1|$, onde F'_1 é o reflectido de F_1 em XY (fig 3.64).

Tomando agora um ponto Q de XY distinto de P, o comprimento do caminho entre F_1 e F_2 passando por Q (fig 3.68) é igual ao de $F_2 \rightarrow Q \rightarrow F'_1$, que, não sendo em linha recta, é superior ao anterior. Ou seja, temos para todo o $Q \neq P$ em XY,

$$|QF_1| + |QF_2| > |PF_1| + |PF_2|.$$

Ora, sendo P um ponto da elipse, a igualdade anterior permite-nos garantir que a recta XY intersecta a elipse num único ponto, P, tratando-se portanto de uma recta tangente à elipse.

Em suma, acabámos de verificar que, dadas uma elipse, com focos F_1 e F_2 , e uma recta r passando por um ponto P da elipse e tal que $\angle XPF_2$ e $\angle F_1PY$ são congruentes (onde X e Y são pontos de r situados em lados opostos relativamente a P), então r é tangente à elipse em P. Por outro lado, sabe-se que não há mais do que uma recta tangente à elipse em cada um dos seus pontos, pelo que o recíproco é também válido.

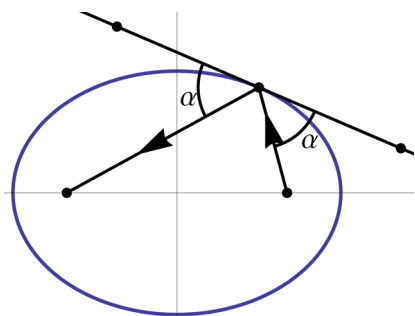


fig 3.69

Regressemos ao exemplo prático da trajectória da bola num bilhar elíptico: se lançada de um foco, F_1 , e uma vez que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão (fig 3.69), é certa a passagem da bola no outro foco. Posicionando o buraco do bilhar nesse foco, fica garantida a entrada da bola, sendo este o princípio que rege o módulo (fig 3.57).

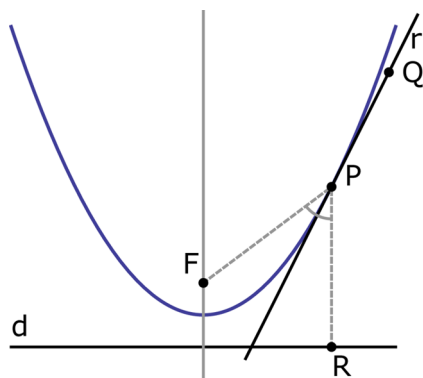


fig 3.70

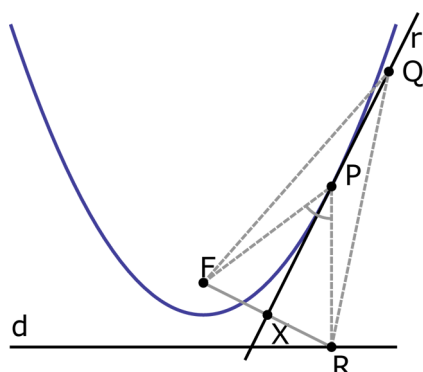


fig 3.71

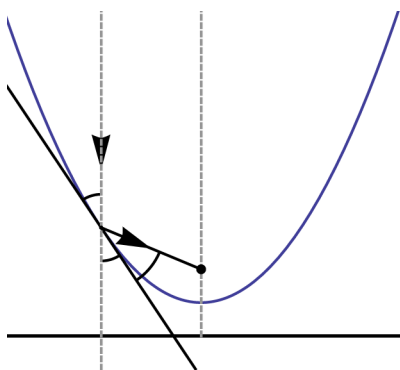


fig 3.72

São várias as aplicações do princípio descrito na vida real e em contextos muito díspares. Uma delas pode ser encontrada num consultório de um dentista. Com o intuito de iluminar um ponto específico da boca de um paciente, o dispositivo de iluminação de um dentista é constituído por um espelho em arco de elipse e uma lâmpada colocada num foco. O médico ajusta então o aparelho de modo que o dente se posicione no outro foco. Assim, toda a luz é canalizada para o outro foco, permitindo uma boa iluminação (fig 3.73) do local a tratar.

Também a Arquitectura é pródiga em exemplos de aplicações da propriedade referida. Por exemplo, na Whispering Gallery, da Catedral de S. Pedro, em Londres (fig 3.75), ou na Whispering Gallery, da Grand Central Terminal Station, em Nova Iorque (fig 3.76). há salas com forma de meio elipsóide (fig 3.35) em que qualquer pessoa que, num dos focos, murmure, é ouvida com nitidez no outro foco.

E se em vez de elipses tivéssemos parábolas?

Tomemos uma parábola, um seu ponto P não pertencente ao eixo de simetria, o foco F e a directriz d (fig 3.70). Designemos por R a projecção de P em d (fig 3.70). Por se tratar de uma parábola, $|PR| = |PF|$. Construamos a recta r que bissecta $\angle FPR$ e verifiquemos que ela é tangente à parábola. Para tal, tomemos um ponto Q de r distinto de P (fig 3.71). Da congruência dos triângulos $[PRX]$ e $[XFP]$ (fig 3.70) resulta que $\angle RXQ$ e $\angle QXF$ são rectos e $|RX| = |XF|$, o que nos permite concluir, em particular, que $|QF| = |QR|$. Por outro lado, QR não é perpendicular à directriz; por conseguinte, a distância de Q a d , $\text{dis}(Q,d)$, é inferior a $|QR|$. Em síntese,

$$0 < |QR| - \text{dis}(Q,d) = |QF| - \text{dis}(Q,d). \quad [3.3]$$

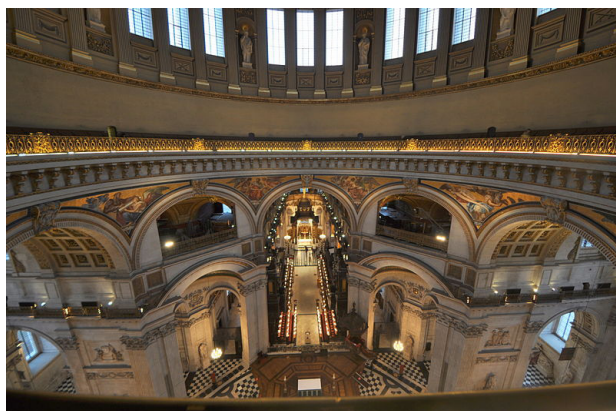
Portanto, Q não pertence à parábola.



3.73



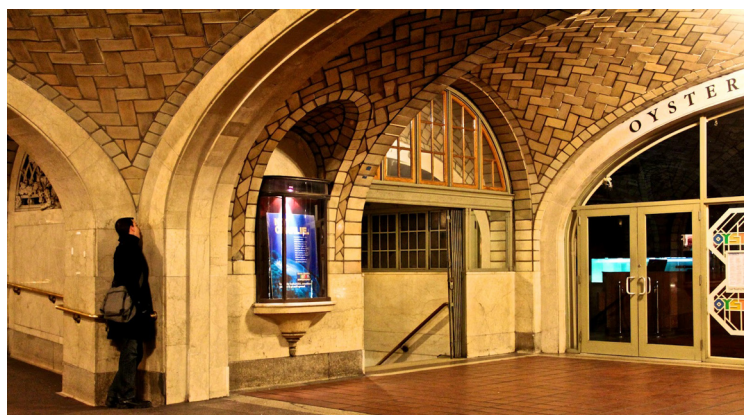
3.74



3.75

3.75 Whispering Gallery, Catedral de São Paulo, em Londres.

3.76 Whispering Gallery, Grand Central Terminal Station, em Nova Iorque.



3.76



3.77

3.77 Os pequenos arcos na base do bico de um lápis são exemplos do traço de uma hipérbole.



3.78

3.78 Um farol tem o formato de um parabolóide: a superfície gerada por rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria.

3.79 Uma antena parabólica tem a forma de um parabolóide.



3.79



3.80

3.80 Forno solar: o formato parabólico faz com que este tipo de forno atinja as temperaturas mais altas entre outros (possíveis) fornos solares.

3.81 Um repuxo de água fornece um excelente exemplo de um esboço de parábola.



3.81

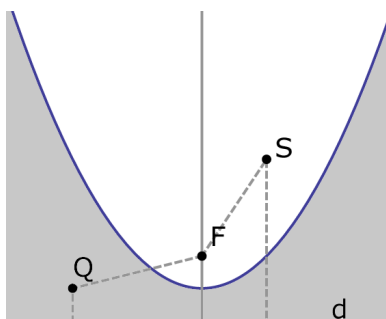


fig 3.82

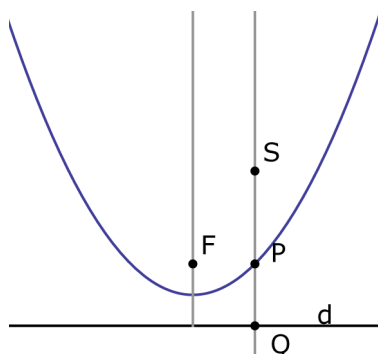


fig 3.83

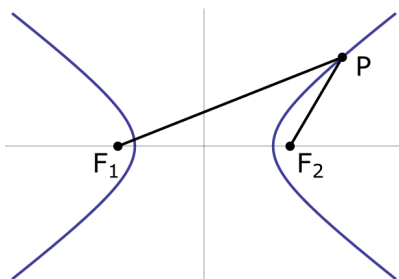


fig 3.84

Concluimos que a recta r , bissetriz de $\angle FPR$, intersecta a parábola num único ponto. Portanto, há apenas duas alternativas para r : ou é tangente à parábola ou paralela ao seu eixo.

Observemos agora que uma parábola delimita duas regiões disjuntas (assinaladas a cinzento e branco na figura 3.82): numa delas, a distância dos seus pontos à directriz é inferior à distância ao foco e, na outra, passa-se o inverso. Acresce que qualquer recta paralela ao eixo atravessa as duas regiões (note-se, por exemplo, em 3.83, que Q e S estão situados em regiões distintas). Ora, por [3.3], a recta r está situada apenas numa das regiões mencionadas, tratando-se pois de uma tangente à parábola.

É agora claro o funcionamento do bilhar parabólico: lançando a bola paralelamente ao eixo, ela passará no foco e, posicionando aí o buraco, é certa a entrada da bola (fig 3.58).

A propriedade deduzida para parábolas é útil em diversos contextos, nomeadamente na construção de sistemas em que se pretenda a concentração de radiações/ondas sonoras num ponto específico. É o que acontece, por exemplo, com as antenas parabólicas: as ondas, praticamente paralelas, enviadas de uma fonte a uma longa distância, são reflectidas na antena e concentram-se no receptor colocado no seu foco, amplificando o sinal recebido do satélite, que, de outra forma, seria débil (fig 3.79). Processo análogo ocorre nos faróis ou nos fornos solares (figs 3.78 e 3.80).

Resta-nos estudar a hipérbole. Neste caso, representando por F_1 e F_2 os focos de uma hipérbole e considerando um seu ponto arbitrário P (fig 3.84), a recta que bisseta o ângulo $\angle F_1PF_2$ é também tangente à hipérbole em P e vice-versa. A dedução é análoga às anteriores e pode ser consultada na referência [J].

É esta a razão pela qual uma bola, num bilhar hiperbólico, dirigida a um foco, após tabelar, cai no buraco situado no outro foco (fig 3.59).

As duas últimas propriedades enunciadas são a chave para o funcionamento de um telescópio de reflexão (fig 3.85). Ao incidir num espelho parabólico existente no interior de um tal telescópio, a luz é canalizada para o foco da parábola mas não o atinge, porque, no seu percurso, a luz encontra um outro espelho, desta vez hiperbólico, onde é reflectida. Coincidindo um dos focos da hipérbole com o da parábola, a luz é então dirigida para o outro foco da hipérbole, onde está confortavelmente o olho do observador.

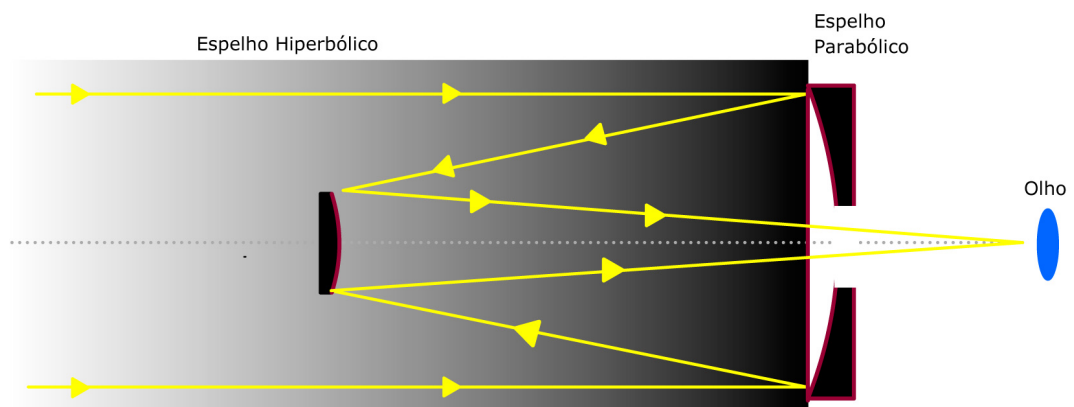


fig 3.85



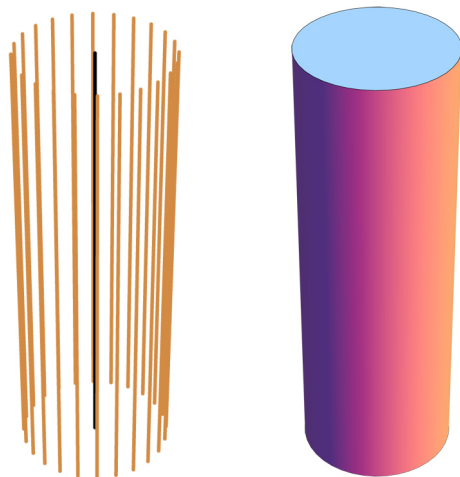
3.87 Hipérbole de fenda
(Matemática Viva)

3.87

3.88 Hipérbolóide de fios
(Matemática Viva)



3.88



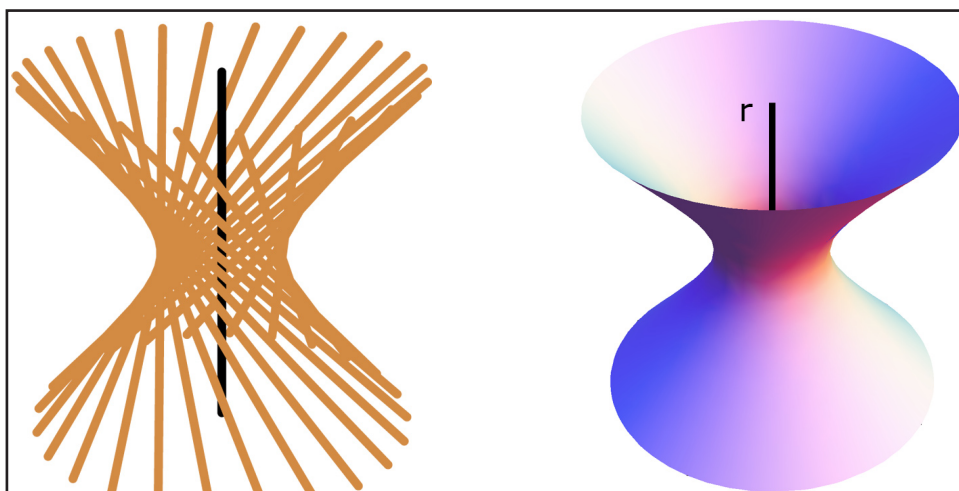
3.89

3.89 Uma família de rectas geradoras de um cilindro.

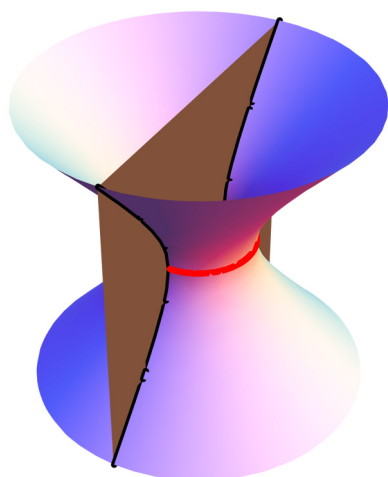
3.90 Uma família de rectas geradoras de um hiperbolóide.

3.91 A intersecção de um hiperbolóide com o plano representado é uma hipérbole.

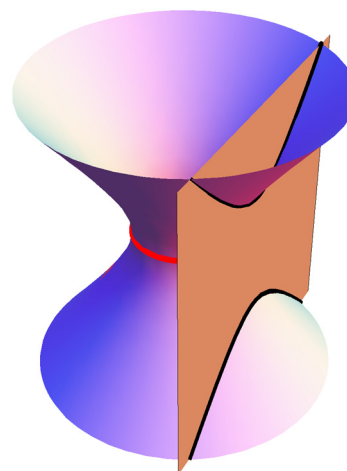
3.92 A intersecção de um hiperbolóide com o plano representado é uma hipérbole de um tipo diferente da figura anterior.



3.90



3.91



3.92

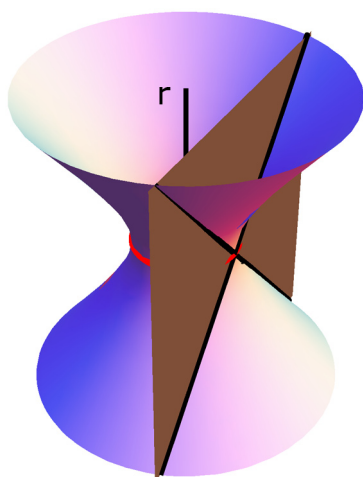
Dois módulos, uma superfície

O cone não é a única superfície cujas secções por qualquer plano são cónicas [NS]. Tal acontece para uma classe de superfícies, ditas quádricas, que inclui o cilindro, a esfera, o elipsóide e o hiperbolóide de uma folha (fig 3.90). Esta é uma superfície gerada por rotação de uma hipérbole em torno da mediatriz dos seus focos. As suas propriedades estão na génese de dois módulos intimamente relacionados da exposição Matemática Viva: a hipérbole de fenda e o hiperbolóide de fios (figs 3.87 e 3.88).

A hipérbole de fenda foi provavelmente um dos módulos com maior impacto na mostra, quer pela dimensão quer pela surpresa causada nos visitantes. Era constituído por uma enorme placa metálica onde estavam gravados dois arcos de hipérbole e por duas hastes metálicas inclinadas e soldadas que giravam sobre um disco móvel situado na base do módulo (fig 3.87). Embora as hastes aparentassem estar em vias de colidir com a placa, tal nunca ocorria.

O hiperbolóide de fios pretendeu elucidar sobre outro aspecto da construção das cónicas. O cone é uma superfície gerada por revolução de uma recta concorrente, não perpendicular, ao eixo de rotação (fig 3.13), mas há duas outras posições possíveis da geratriz relativamente ao eixo de rotação: se for paralela, a superfície obtida é um cilindro (fig 3.89); se for enviesada e não ortogonal, o resultado é um hiperbolóide de uma folha (que designaremos apenas por hiperbolóide).

Poderá parecer estranho que uma superfície tão curvada contenha sequer uma recta. Contudo, atentemos nas secções de um hiperbolóide por uma família de planos paralelos ao eixo r : a intersecção é uma hipérbole (figuras 3.91 e 3.92) ou a união de duas rectas concorrentes (fig 3.93) quando o plano é tangente à circunferência a vermelho.

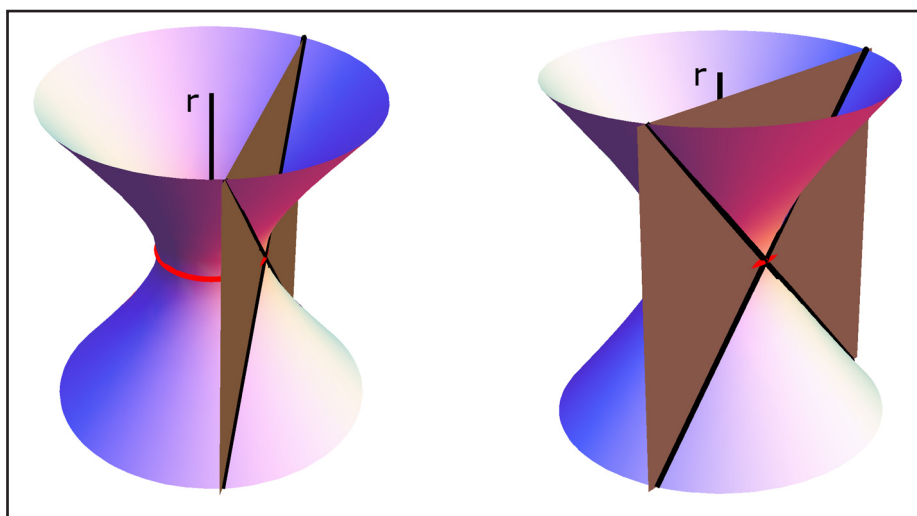


3.93 Quando o plano é tangente à circunferência, a intersecção reduz-se a duas rectas concorrentes que são também geratrizes do hiperbolóide.

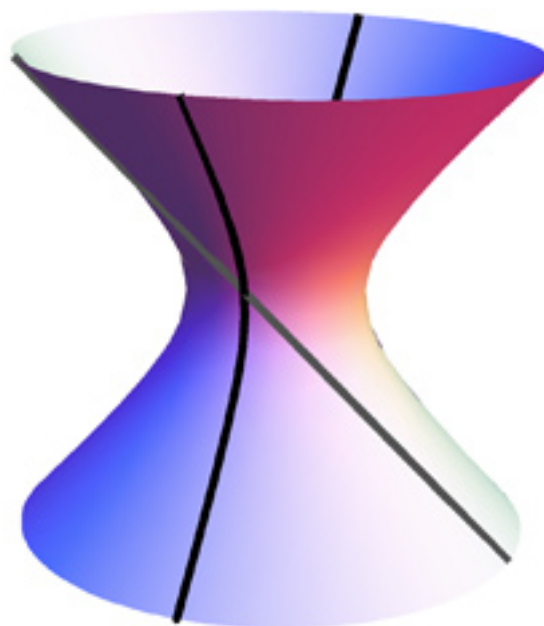
3.94 Cada geratriz do hiperbolóide é imagem de uma das duas assinaladas na figura 3.93 por uma rotação em torno de r .

3.95 A figura ilustra a razão pela qual as hastes móveis não tocam na placa metálica do módulo.

3.93



3.94



3.95

É certo que há uma infinidade de outros planos tangentes à circunferência a vermelho, mas todos eles se obtêm por uma rotação em torno de r do plano representado em 3.93, e portanto as restantes possíveis rectas de intersecção são imagem destas por rotação em torno de r (fig 3.94). Construimos assim duas famílias de rectas (fig 3.96) geradoras de um mesmo hiperbolóide de fios.

O módulo que exhibe uma representação física de um hiperbolóide de fios consiste em dois discos, um fixo e um móvel, aos quais foram afixadas as extremidades de um número elevado de fios de modo que ficassem paralelos entre si. Girando sucessivamente o manipulador, visualizavam-se esboços de famílias de rectas geradoras de diferentes hiperbolóides (fig 3.88). Na situação limite, de uma rotação total do manipulador, a superfície final seria um cone.

Um princípio análogo rege o módulo sobre a hipérbole de fenda (fig 3.87). As duas varas metálicas rotativas que aparentam embater na fissura da hipérbole correspondem a duas geratrizes concorrentes (representadas a cinzento na figura 3.95) do hiperbolóide gerado por revolução da hipérbole gravada (e representada a preto).

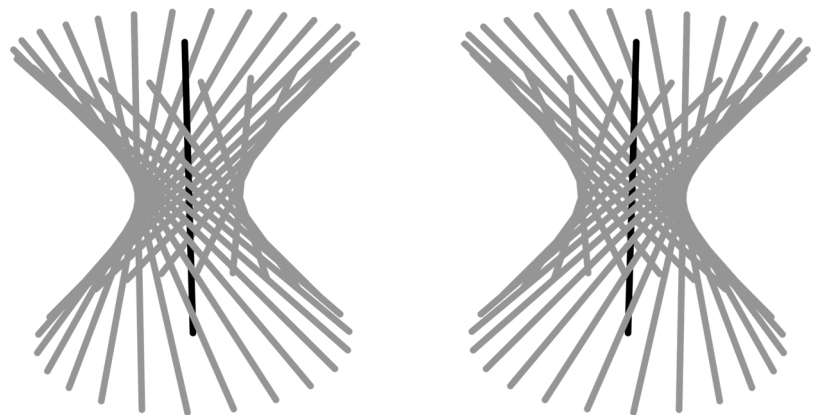


fig 3.96

Para saber mais

Equações

Se adoptarmos um sistema cartesiano de eixos no plano e, relativamente a ele, a elipse tiver focos $(c,0)$ e $(-c,0)$ e for k a soma das distâncias de cada um dos seus pontos aos focos, ela descreve-se pela equação

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k.$$

Esta equação nem sempre é prática, mas é equivalente a uma outra do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

sendo a e b o comprimento dos semi-eixos.

Na hipérbole, por seu turno, o que é constante é o valor absoluto da diferença entre as distâncias de cada um dos seus pontos aos focos. E, em sistemas de eixos apropriados, a hipérbole e a parábola são representadas por equações igualmente simples.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	para a hipérbole.
$y - px^2 = 0$	para a parábola.

Uma roda muito especial

No capítulo 2 analisámos estradas apropriadas a certas rodas exóticas, mas não abordámos na altura a questão da existência de rodas que são a sua própria estrada¹. Porque colocamos agora este problema? A razão prende-se com o facto de uma tal roda ser única e ter bordo parabólico.

¹ A primeira menção que conhecemos, sem demonstração, da existência de uma roda de bordo derivável que é a sua própria estrada, remonta a [Ro]. Em [HW], o assunto é retomado, mas de novo apenas referido.

Às condições que descrevem o movimento suave de uma roda numa estrada ([CO]), precisamos de acrescentar que a roda é idêntica à estrada e que, no movimento, os pontos correspondentes se identificam. Para isso, o gráfico da função F (a estrada) deverá ser imagem do bordo da roda pela reflexão numa recta $y=c$, com c negativo e igual a $F(0)$. Estas condições traduzem-se por:

$$\begin{cases} r(\theta(t))\cos(\theta(t)) &= t \\ r(\theta(t))\sin(\theta(t)) &= -F(t) + 2c \end{cases}$$

Manipulações algébricas no sistema conduzem-nos à conclusão de que F é solução da equação diferencial $tF' - 2F + 2c = 0$.

Resolvendo a equação anterior, concluímos que $F(t)$ é da forma $-t^2 + c$ (t real), para algum c , ou é uma reparameterização desta função. Por outro lado, o facto de ser necessário que a igualdade $\theta(0) = -\pi/2$ se verifique permite-nos concluir que $c = -1/4$. A curva pretendida é pois uma parábola, de expressão designatória

$$y = -x^2 - 1/4.$$

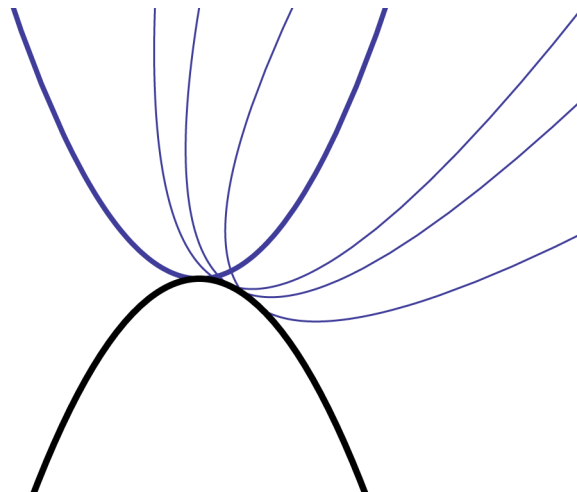
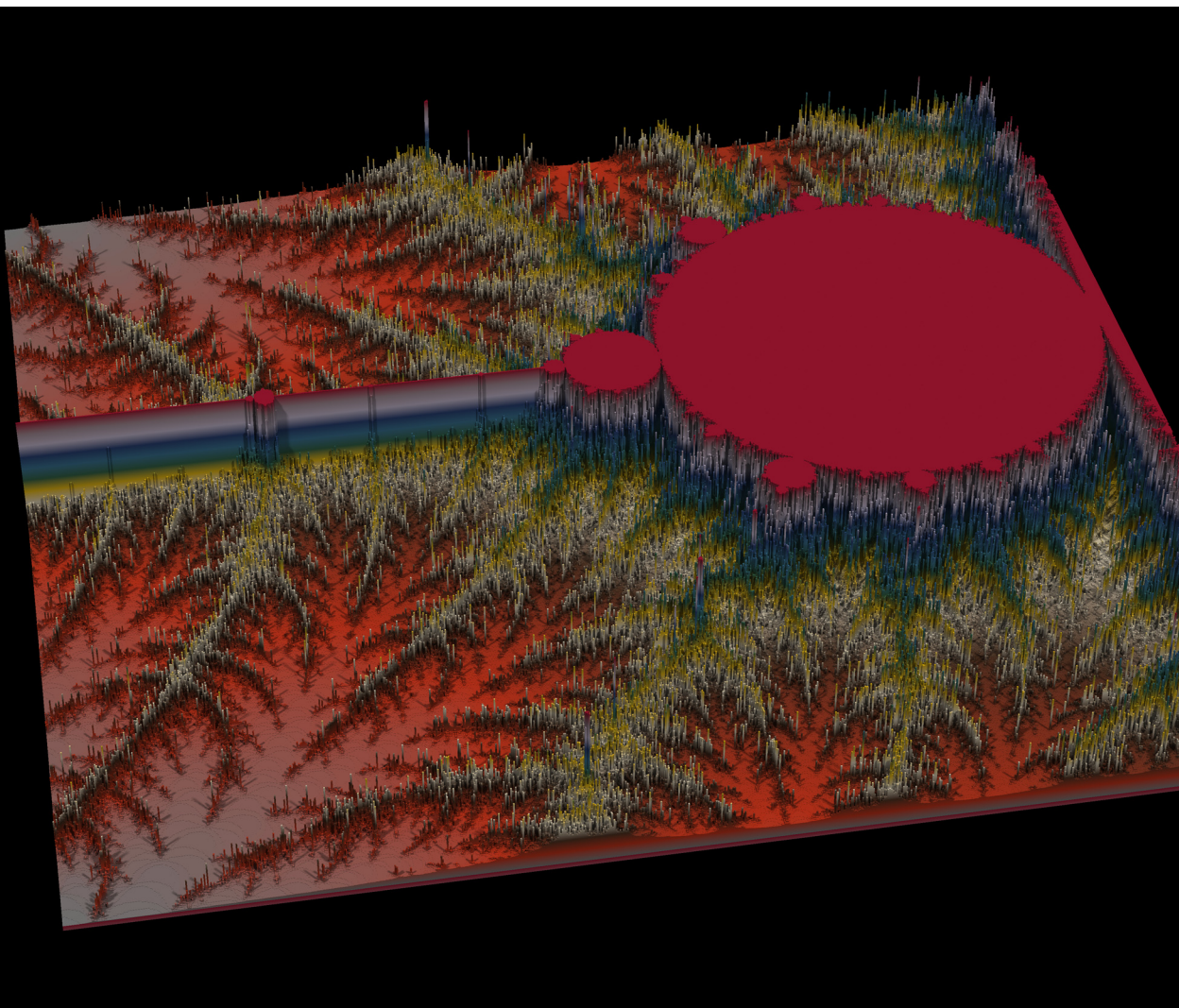


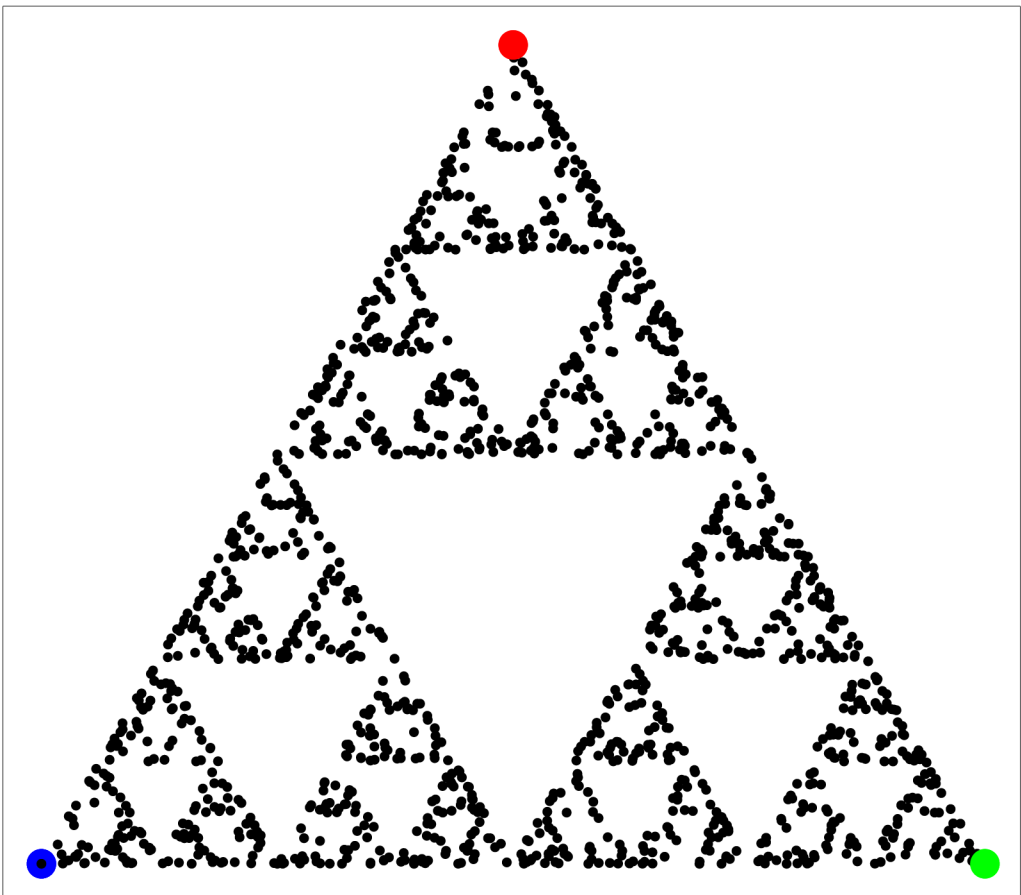
fig 3.86

04 Jogos e fractais

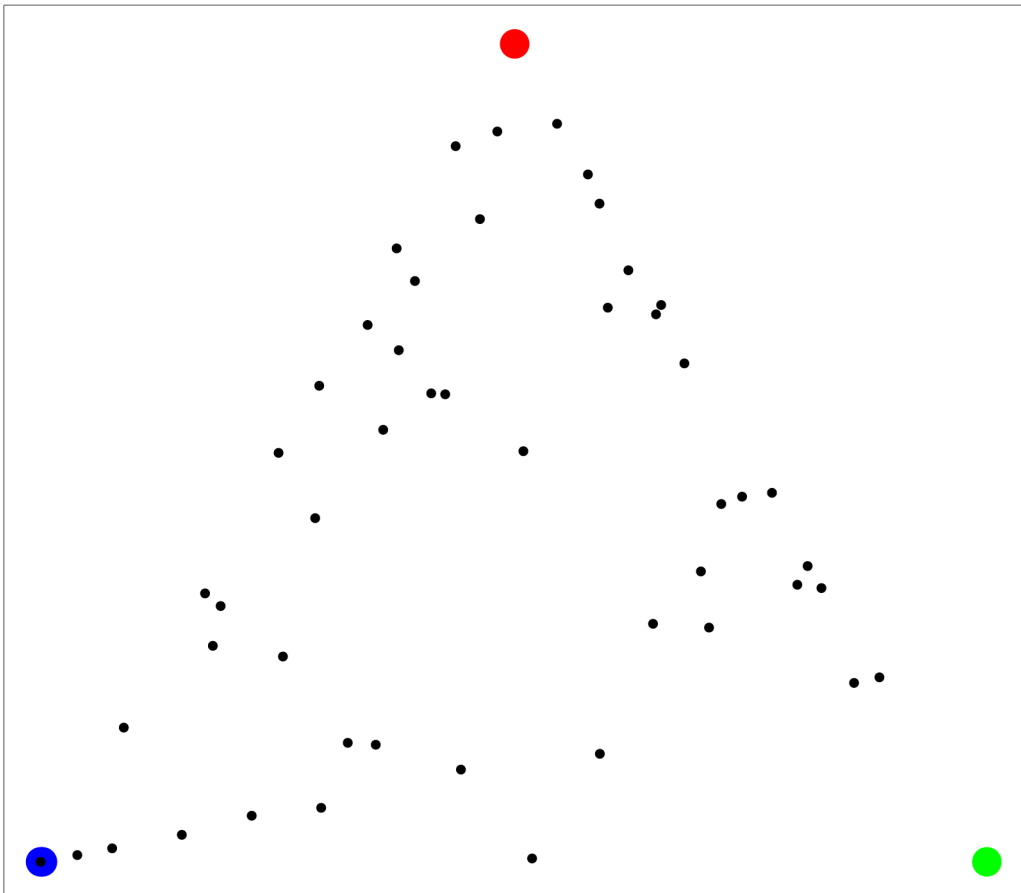


Secções

O módulo
Jogando noutros polígonos
Para saber mais



4.1



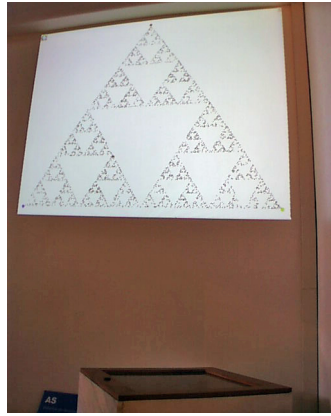
4.2

À entrada da exposição Matemática Viva ([web4]), uma parede exibia uma figura de grandes dimensões (fig 4.1). Não se tratava, contudo, de uma imagem estática: ela foi sendo construída, ponto a ponto, ao longo de vários anos, tendo cada visitante a oportunidade de contribuir com um ponto, bastando para isso accionar um botão. No início da exposição, o visitante deparava-se apenas com uma amálgama de pontos aparentemente desordenada (fig 4.2). No entanto, decorridos alguns anos, foi possível detectar uma forma regular, com traços geométricos muito interessantes.

Cada novo ponto da figura correspondia ao ponto médio do segmento que unia o último ponto registado a um dos vértices do triângulo grande. Como é que um processo de construção tão simples conduziu a um desenho tão sofisticado? Esta é precisamente a questão que analisaremos de seguida.



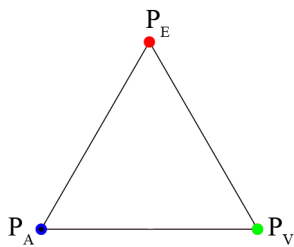
4.3



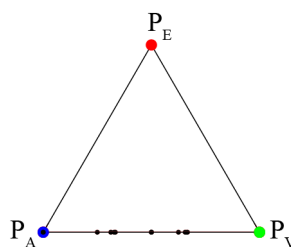
4.4



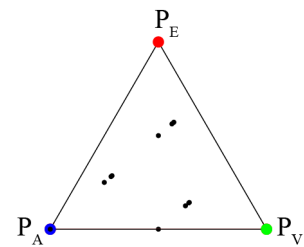
4.5



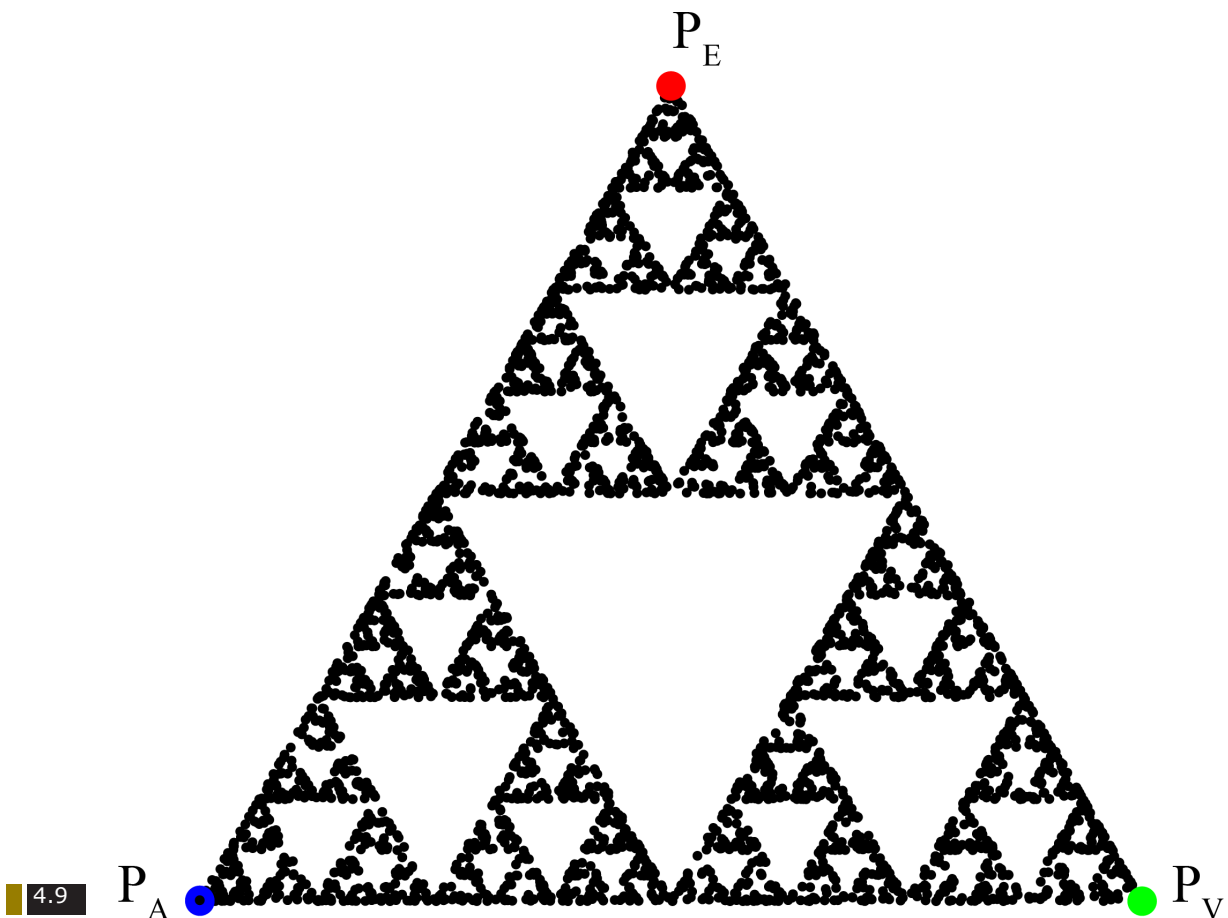
4.6



4.7



4.8



4.9

O módulo

Os adereços preparados para o módulo resumiam-se a: a) três pontos coloridos de azul, verde e vermelho, dispostos nos vértices de um triângulo equilátero e projectados numa parede e b) uma grande caixa com um vidro no topo (fig 4.3) e um botão ao lado, em cujo interior estava um dado, com uma face visível virada para cima e, sempre que o botão era accionado, o dado era lançado (fig 4.5). Não se tratava, contudo, de um dado convencional: em vez dos tradicionais pontos, cada par de faces opostas estava pintado com uma de três cores - verde, vermelho ou azul. Após cada lançamento, a cor visível era registada por um sensor e, mediante o resultado, era recalculada a figura que estava a ser projectada: fig 4.4 (informação resumida sobre este módulo encontra-se em [At]).

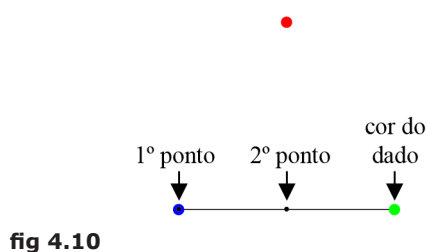


fig 4.10

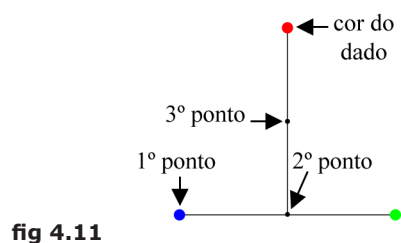
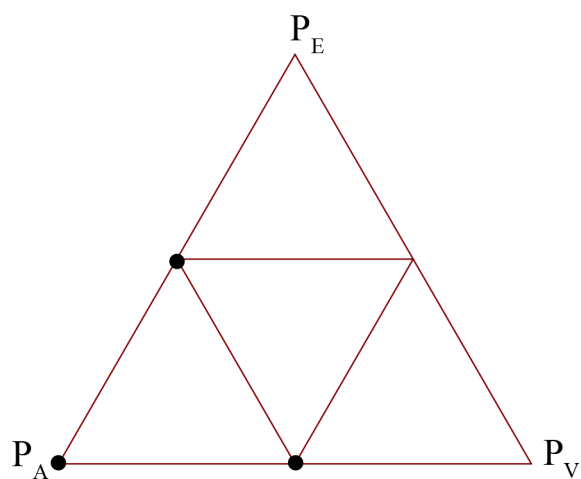


fig 4.11

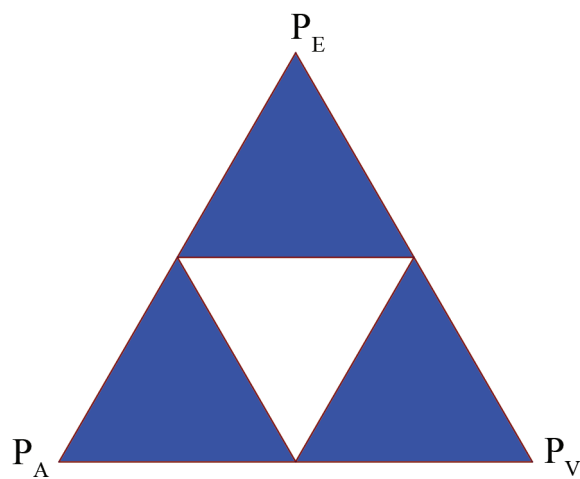
Recuemos ao início do processo: o primeiro ponto a preto foi marcado sobre o vértice azul. A segunda marcação ocorreu após o primeiro lançamento do dado: na imagem da parede, acrescentou-se o ponto médio do segmento unindo o vértice da cor obtida ao ponto anteriormente marcado (fig 4.10) - o novo ponto correspondia, pois, à imagem do anterior por uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$ e centro no vértice da cor registada no dado. Repetindo este procedimento, obteve-se o terceiro ponto (fig 4.11). A figura patente na exposição resultou de iterações sucessivas do processo descrito.

Assim, a partir da primeira imagem, foram-se formando, no interior do triângulo com vértices em P_A , P_E e P_V , configurações de aspecto complicado cujo limite, que designaremos por \mathcal{L} , não está ao nosso alcance desenhar mas podemos descrever (a figura 4.9 é uma aproximação grosseira de \mathcal{L} , obtida depois de apenas 4000 lançamentos).

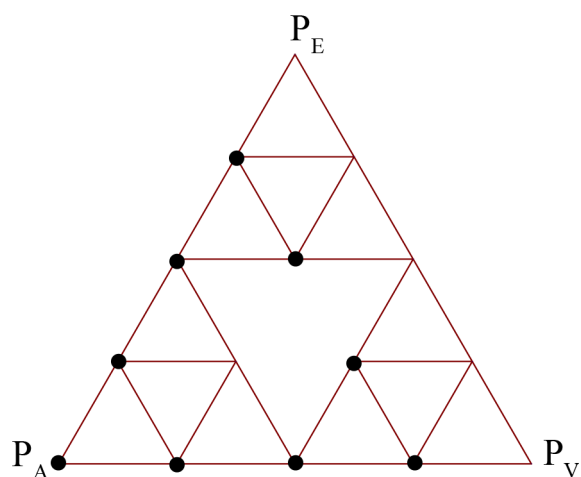
As figuras 4.6, 4.7 e 4.8 mostram as imagens que se obteriam se, no dado, tivesse saído: (a) sempre a cor azul; (b) alternadamente azul e verde; (c) azul, verde e encarnado, repetidas por esta ordem.



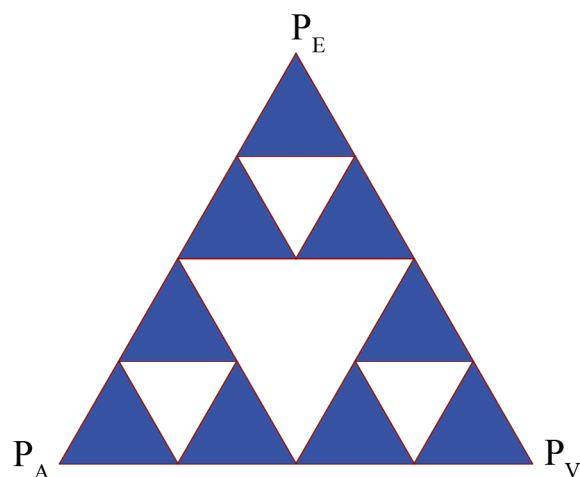
4.12



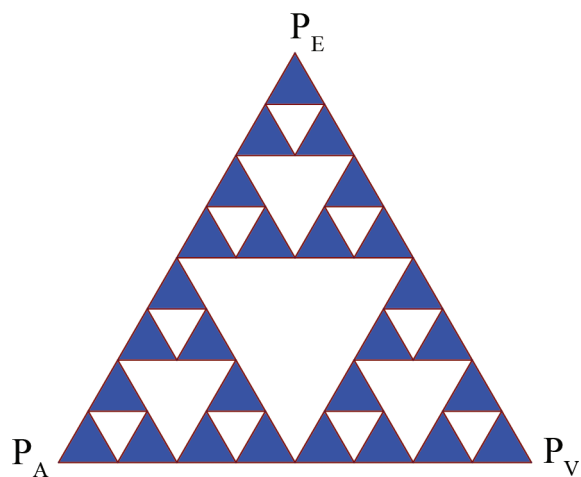
4.13



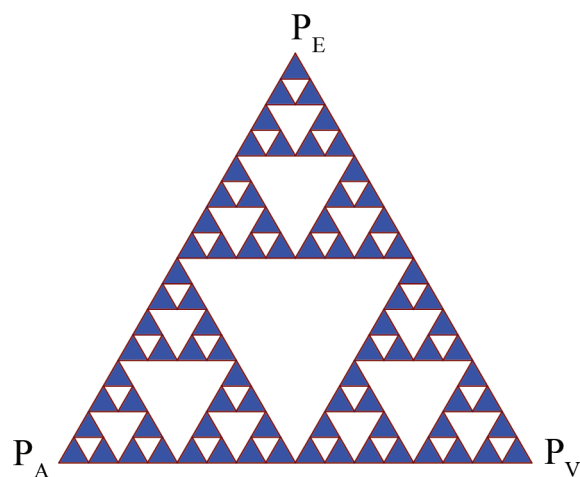
4.14



4.15



4.16



4.17

fig 4.18

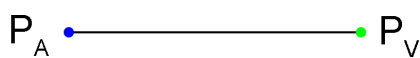


fig 4.19

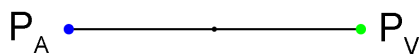


fig 4.20

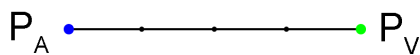
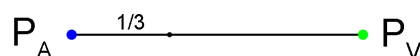
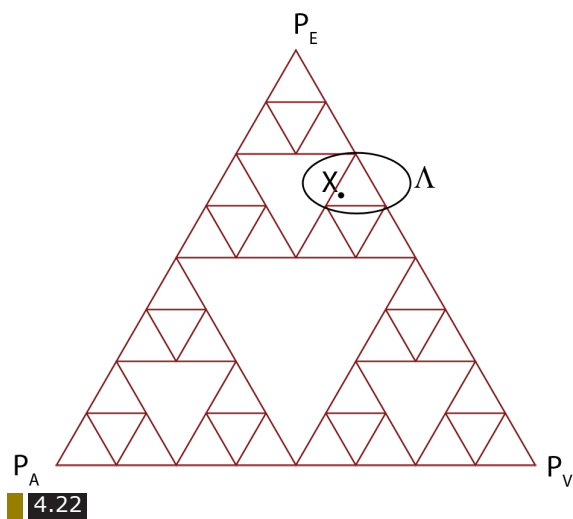


fig 4.21



Após a primeira aplicação do processo, os dois pontos, o inicial e o entretanto obtido (que poderão coincidir), terão de ocupar duas das três posições indicadas na figura 4.12, que são os vértices do triângulo equilátero pequeno à esquerda, um dos quatro em que se divide a região triangular original $[P_A P_E P_V]$. Em particular, estes dois pontos pertencem à figura 4.13, que designaremos por T_2 . Analogamente, após o segundo lançamento do dado, o novo ponto terá de ocupar uma das 9 posições assinaladas na figura 4.14, que são vértices de triângulos equiláteros iguais em que se dividem três da geração anterior – a região triangular central sem o bordo da figura 4.13 não voltará a intervir no processo. Os três pontos marcados pertencem, pois, a T_3 (fig 4.15). Em geral, na n -ésima iteração, todos os pontos pertencem aos vértices de uma família T_{n+1} de triângulos pequeninos, equiláteros e iguais, que se obtêm dividindo todos os da geração anterior e retirando-se as regiões triangulares médias. À intersecção infinita S de todos os T_i 's chama-se *triângulo de Sierpinski*. Do que vimos, sabemos que \mathcal{L} está contido em S . E a inclusão recíproca será válida?

Consideremos apenas o que ocorre no lado do triângulo equilátero com extremos P_A e P_V , que supomos ter comprimento 1. Note-se que a marcação dos pontos neste lado do triângulo pressupõe que a cor vermelha não sai nos lançamentos, uma vez que ela determina o registo de pontos fora de $[P_A P_V]$. Neste segmento, após o primeiro lançamento, só poderá ser marcado um de dois pontos: P_A ou o ponto médio do segmento. Com o segundo lançamento, poderão aparecer dois pontos: os que se encontram a uma distância de $1/4$ e $3/4$ de P_A (fig 4.20). O que ocorre na quarta geração? Indutivamente, deduzimos que qualquer ponto de $[P_A P_V]$ seleccionado pelo processo indicado dista de P_A uma fracção do tipo $k/2^n$, com k e n inteiros não-negativos e k menor ou igual ao denominador da fracção. Portanto, nem todos os pontos do triângulo de Sierpinski S são elementos de \mathcal{L} : por exemplo, o ponto que em $[P_A P_V]$ dista $1/3$ de P_A está em S mas não em \mathcal{L} .



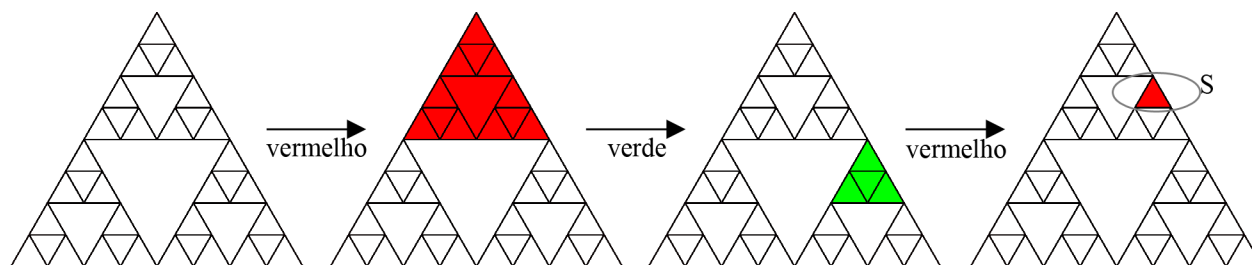
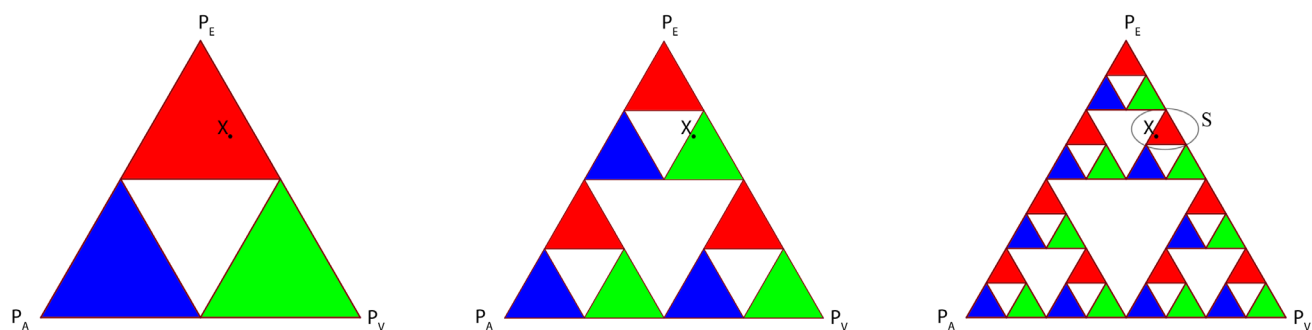
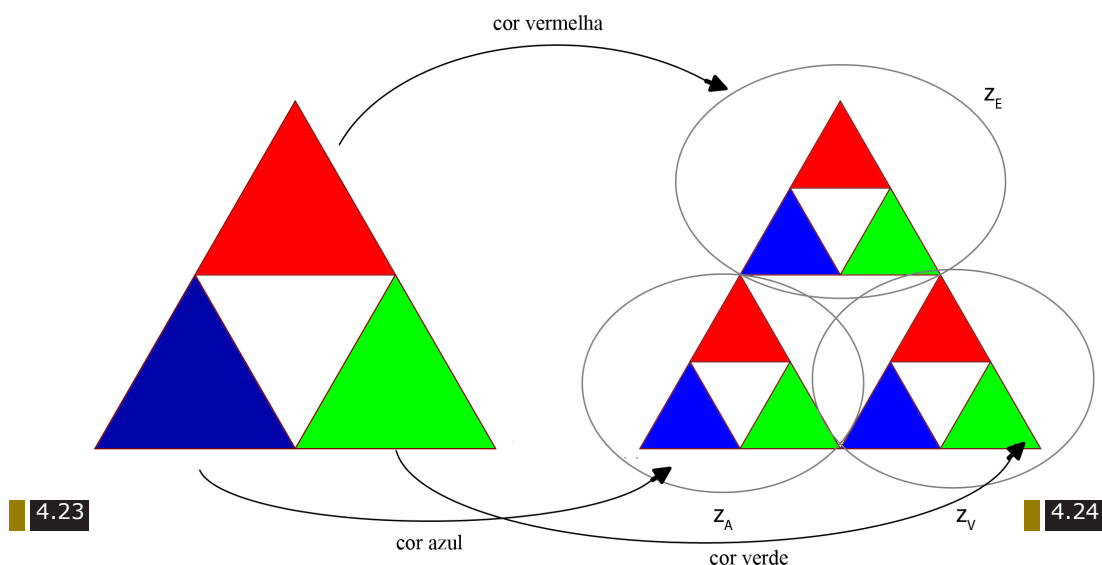
4.22 Todos os pontos do triângulo Λ estão a uma distância inferior a $1/4$ de x .

4.23 Na figura, todos os pontos (de \mathcal{L}) têm a cor do último lançamento.

4.24 Na figura, todos os pontos (de \mathcal{L}) têm a cor do penúltimo lançamento.

4.25 Distribuição das cores correspondentes, respectivamente, ao último, penúltimo e ante-penúltimo lançamentos.

4.26 Após a sequência de lançamentos: "vermelho-verde-vermelho", o ponto ocupará a região S .



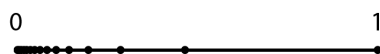


fig 4.27

0 tem arbitrariamente perto um ponto da sucessão $(1/n)_n$. Por menor que seja o número positivo que consideremos, existe um ponto da sucessão a uma distância de 0 ainda inferior a esse número.

No entanto, \mathcal{L} é uma boa aproximação de S , isto é, cada ponto de S tem, arbitrariamente perto, um ponto de \mathcal{L} .

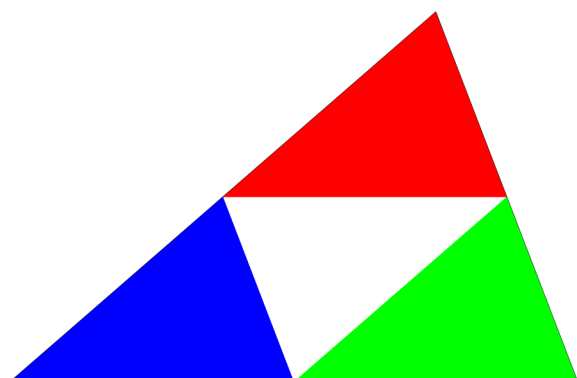
Vejamos um exemplo: como aproximar, com um erro máximo permitido de $1/4$, o ponto X de S (fig 4.22) por um ponto de \mathcal{L} ? O ponto X encontra-se no interior do triângulo equilátero Λ ; ora, como os lados deste triângulo medem $1/4$, qualquer ponto de Λ está a uma distância inferior a $1/4$ de X . Se garantirmos a existência de um ponto de \mathcal{L} em Λ (ou no seu interior), temos resolvido o problema proposto.

Começemos por observar que a região a vermelho da figura 4.23 corresponde à imagem do triângulo original por uma homotetia de centro P_E (vértice encarnado) e razão $1/2$. O mesmo é válido para a região azul (sendo agora P_A o centro da homotetia) e para a região verde (centro em P_V). Deduz-se então que, nestas três zonas coloridas, os pontos de \mathcal{L} possuem a cor registada no lançamento anterior à sua marcação. E como descobrir a cor do penúltimo lançamento?

Antes do último lançamento, os pontos distribuíam-se, então, por três zonas distintas, de acordo com a cor registada no lançamento antecedente (fig 4.23). Após o último lançamento, os novos pontos passaram a distribuir-se por outras três zonas (fig 4.24): z_E , no caso de ter saído vermelho; z_A , para o azul; e z_V para o verde. Nestas três regiões, todos os pontos de \mathcal{L} dos pequenos triângulos coloridos possuem a cor dos que lhes deram origem e, portanto, mantêm a do penúltimo lançamento.

Considerações análogas permitem-nos concluir que, na imagem mais à direita da figura 4.25, os pontos de \mathcal{L} têm as cores obtidas no antepenúltimo lançamento.

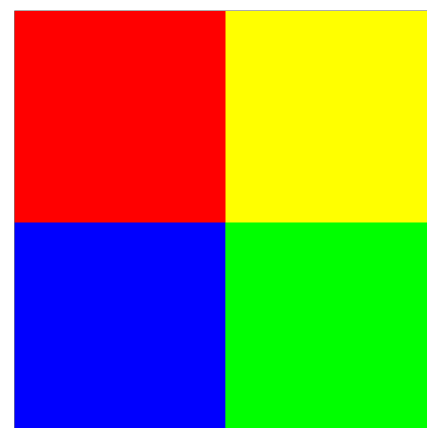
Em resumo: para existir um ponto de \mathcal{L} no triângulo Λ , basta que, a certa altura, no lançamento dos dados, saiam as cores “vermelho, verde, vermelho”, por esta ordem (fig 4.26).



4.28

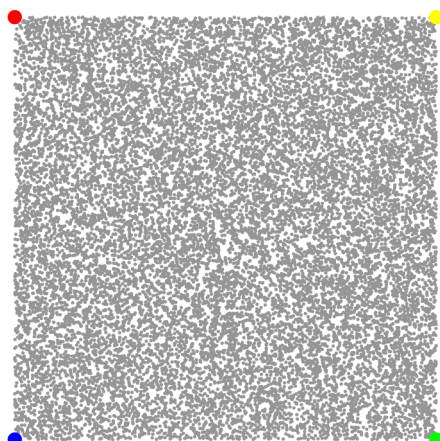
4.28 A colorido, encontram-se as imagens do triângulo grande pelas homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro em cada um dos vértices

4.29 A colorido, encontram-se as imagens do quadrado grande pelas homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro em cada um dos vértices



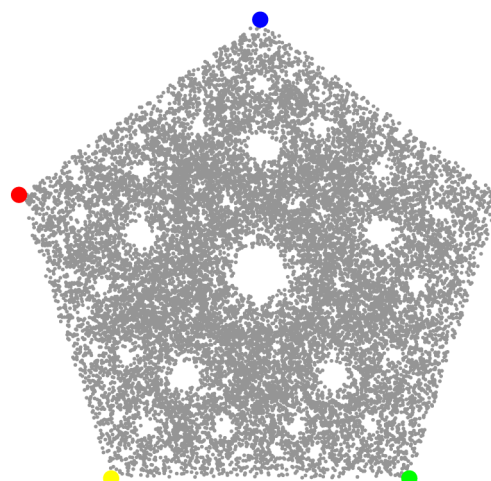
4.29

4.30 Simulação do resultado do jogo descrito, para o caso do quadrado (com 20000 lançamentos).

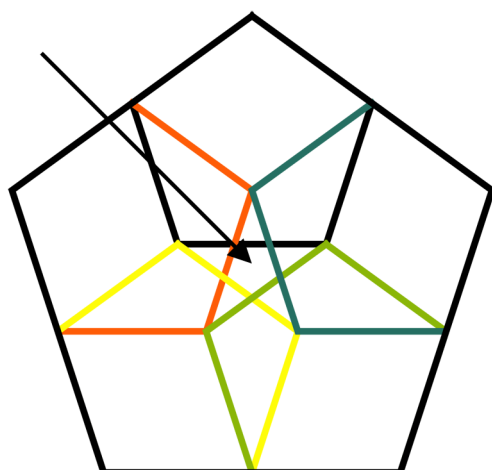


4.30

4.31 Simulação do resultado do jogo descrito, para o caso do pentágono regular (com 20000 lançamentos).



4.31



4.32

4.32 A colorido, encontram-se as imagens do pentágono grande pelas homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro em cada um dos vértices.

O exemplo retratado na figura 4.22 é muito específico (nele impôs-se, por exemplo, que o erro máximo seja $\frac{1}{4}$). Contudo, o método empregue pode ser generalizado, garantindo a existência de uma sequência finita de cores que culmina na marcação de um ponto tão próximo quanto queiramos de um outro ponto (previamente fixado) do triângulo de Sierpinski.

Por outro lado, como se está a supor que ocorreu uma infinidade de lançamentos aleatórios do dado, as cores registadas nesses lançamentos formam uma sucessão (aleatória) de cores. E é possível provar que, com probabilidade 1, qualquer sequência finita de cores aparece na referida sucessão [BR]. Estes factos levam-nos, pois, a garantir que \mathcal{L} é uma boa aproximação de \mathcal{S} .¹

Jogando noutros polígonos

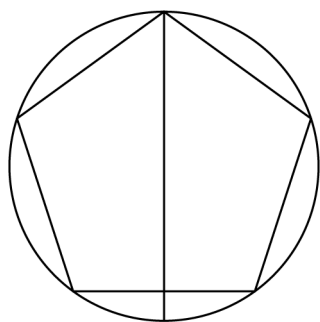
Fixado um triângulo, as suas imagens pelas três homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro nos seus vértices não preenchem o triângulo original – há um “buraco” triangular no meio (fig 4.28). Tal buraco nunca poderá ser visitado por uma sucessão de pontos gerada pelo processo descrito. E se tivéssemos usado um quadrado?

Neste cenário, os quatro quadrados homotéticos preencheriam o original (fig 4.29). Na realidade, uma sucessão de pontos resultante de uma infinidade de lançamentos aleatórios do dado não só não deixa buracos (fig 4.30) como, de facto, cada ponto do quadrado pode ser aproximado tão bem quanto se queira por elementos da referida sucessão.

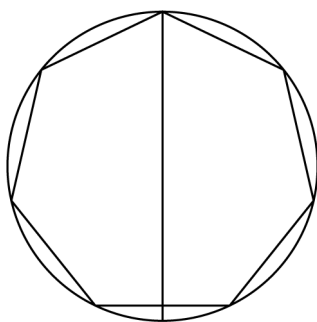
E se, em vez de quadrados, usarmos pentágonos regulares (fig 4.32)?

Uma simulação do resultado do jogo, adaptado a um pentágono regular, está patente na figura 4.31. (applets ligados a esta temática podem ser encontrados em [web4]).

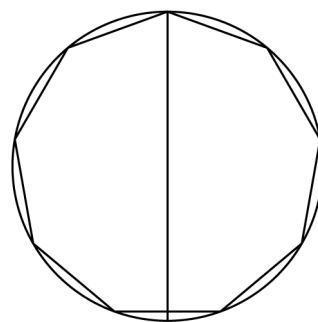
¹ Uma versão mais curta deste texto foi publicada na coluna do Atractor na revista Gazeta de Matemática da SPM.



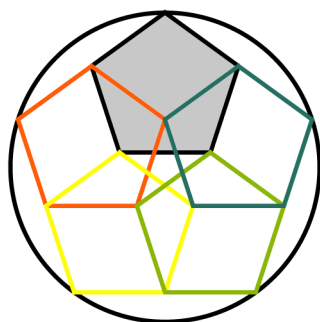
4.33



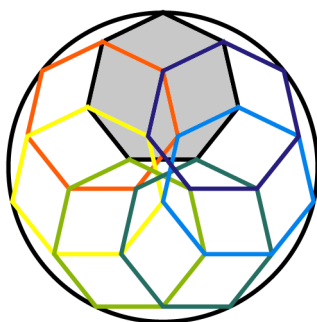
4.34



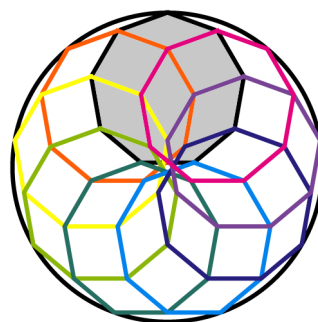
4.35



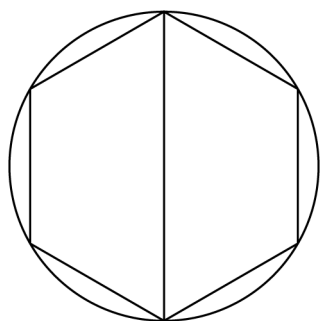
4.36



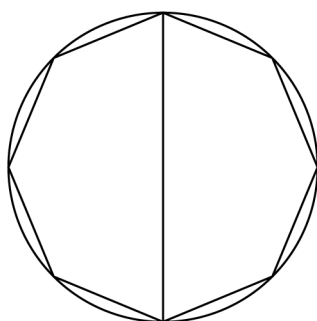
4.37



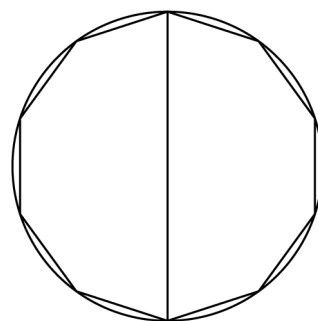
4.38



4.39



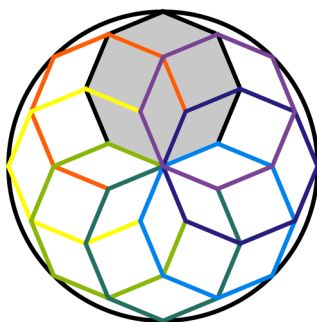
4.40



4.41



4.42



4.43



4.44

A situação é, de alguma forma, diferente das dos dois cenários já analisados: coexistem buracos com zonas de sobreposição. Na figura 4.32, podem ver-se um pentágono (a preto) e as suas imagens por cada uma das cinco homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro nos seus vértices. A seta aponta para um “buraco” onde não existe nenhum ponto criado pelo processo descrito.

Genericamente, e para polígonos regulares, a ocorrência de buracos depende apenas da paridade do número de lados – eles existem apenas no caso de esse número ser ímpar. Vejamos porquê.

Num polígono P , com um número ímpar de lados, cada vértice opõe-se a um ponto médio de um lado, sendo, portanto, a distância entre estes dois pontos menor que o diâmetro da circunferência que o circunscreve (figs 4.33, 4.34 e 4.35). Assim, quando consideramos, em conjunto, todas as imagens de P pelas homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro nos vértices desse polígono, tais imagens não preenchem P , deixando um pequeno buraco vazio no centro (figs 4.36, 4.37 e 4.38), que não pode ser visitado por nenhuma sequência de pontos construída pelo processo descrito anteriormente.

O mesmo não se passa quando o número de lados do polígono é par (figs 4.39, 4.40 e 4.41). Neste caso, cada vértice opõe-se a outro vértice. E, portanto, se considerarmos, em conjunto, todas as imagens do polígono P pelas homotetias de razão $\frac{1}{2}$ e centro nos seus vértices, estes novos polígonos preenchem o inicial, não originando buracos (figs 4.42, 4.43 e 4.44).

Para saber mais

Conjunto ternário de Cantor

Nesta secção, dedicar-nos-emos ao estudo de um conjunto que, como veremos, tem grande afinidade com o triângulo de Sierpinski. Descoberto por Georg Cantor (1845-1918), o *conjunto ternário de Cantor* é digno de realce tanto pelas propriedades geométricas que apresenta como pelas de carácter aritmético.

Consideremos um segmento fechado I de comprimento 1, que podemos imaginar como sendo o intervalo $[0,1]$. Dividindo I (fig 4.45) em três partes iguais e retirando o segmento do meio, deixando, no entanto, os seus extremos, obtemos I_1 - a união de dois segmentos disjuntos de comprimento $1/3$. Procedendo de modo análogo, dividindo cada um destes dois segmentos em três partes e retirando o segmento médio (deixando sempre os extremos), obtemos I_2 : que é a união de quatro segmentos disjuntos de comprimento $1/9$. Repetindo este processo indefinidamente, construímos uma sucessão $(I_n)_n$, sendo cada I_n a união de 2^n segmentos disjuntos de comprimento $(1/3)^n$. O conjunto ternário de Cantor, que designaremos por C , é a intersecção de todos os I_n 's.

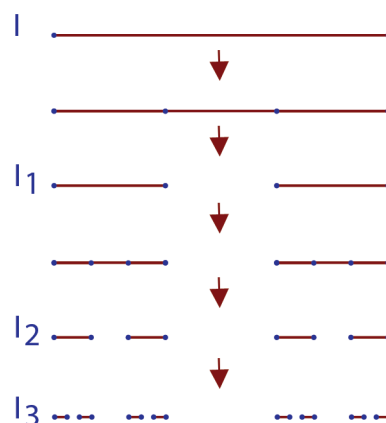


fig 4.45

Nesta fase, o leitor poderá questionar-se sobre se o conjunto de Cantor (C) terá sequer algum elemento. Observando que os dois extremos do segmento inicial (0 e 1) pertencem a todos os I_i 's, deduz-se que eles ainda fazem parte de C . O mesmo se passa com os quatro pontos que delimitam os dois segmentos de I_1 (0, $1/3$, $2/3$, 1), com os oito que delimitam I_2 (isto é, as fracções $k/3^2$, $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$), e com os dezasseis de I_3 , etc. Concluimos, assim, que o conjunto de Cantor não só é não vazio como é de facto infinito.

Contudo, o conjunto C é bastante esburacado: não há nenhum segmento, por mais pequeno que seja, contido em C . Vejamos porquê (fig 4.46). Por construção, os conjuntos I_n são uniões de segmentos de comprimento $1/3^n$; ora, como a sucessão $(1/3^n)_n$ tem limite 0, se considerarmos um segmento qualquer s , sabemos que existe I_n cujos segmentos constituintes têm comprimentos menores do que o de s . Deduz-se, então, que s não está contido em I_n e, portanto, também não está em C .

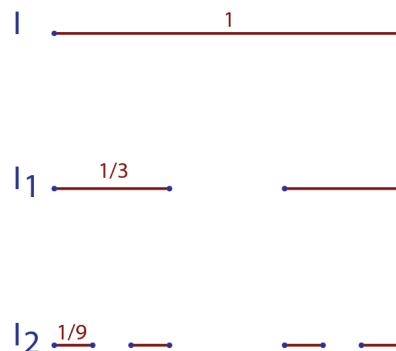


fig 4.46

A estas propriedades geométricas juntaremos de seguida outras de carácter aritmético. Mas, antes, efectuaremos uma pequena digressão sobre a representação dos números em diferentes bases.

Representação em base 10

1
2
3
4
...
10
20
40

Divisão sucessiva por 2

1
 $2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
 $3 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
 $4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
...
 $10 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
 $20 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
 $40 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

Representação em base 2

1
10
11
100
...
1010
10100
101000

Cálculo auxiliar
(escrevendo 4 em base 2):

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 2} \overline{) 2} \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$$

↖

$4 = 100_{(2)}$

Cálculo auxiliar
(escrevendo 40 em base 2):

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 20} \overline{) 2} \\ \hline 0 \quad 10 \overline{) 2} \\ \hline 0 \quad 5 \overline{) 2} \\ \hline 1 \quad 2 \overline{) 2} \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$$

↖

$40 = 101000_{(2)}$

Representação em base 2

101
1001
11111
111101

Cálculo

$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
 $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
 $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
 $1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

Representação em base 10

5
9
31
61

Idioma dos números

No dia-a-dia, nas contagens que efectuamos, utilizamos, em geral, dez dígitos para escrever os números - de 0 a 9. Sendo a contagem pelos dedos um processo que nos é natural, o número 10 acabou por ser privilegiado relativamente aos restantes.

No entanto, nem todos os sistemas utilizam dez dígitos - por exemplo, um computador apenas se serve de dois, o 0 e o 1. O leitor poderá duvidar desta afirmação, pois afinal é possível trabalhar com dez dígitos no computador. O que se passa é que, internamente, todas as operações se realizam com recurso a apenas dois dígitos. Diz-se, então, que o computador utiliza a *base 2*.

Na nossa escrita habitual dos números, 1011 representa $1 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 1 \times 1$, ou, de uma maneira mais condensada,

$$1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

Por analogia, em base 2, 1011 representa o número que, em base 10, resulta das somas das potências sucessivas de 2 com os coeficientes dados, por ordem, pelos dígitos de 1011; ou seja, trata-se do número

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0,$$

isto é, o natural 11.

E qual é o natural que, em base 2, se representa por 1001? E por 11111?

A página ao lado contém alguns exemplos de conversão da escrita de números naturais na base 2 para a base 10, e vice-versa.

O mesmo tipo de cálculos pode ser efectuado em qualquer base b , b natural maior ou igual a 2, e pode provar-se que todos os números reais, e não apenas os naturais, têm uma escrita em qualquer base b (nem sempre única). O que significa, em particular, que, para números reais de módulo menor que 1, temos de utilizar potências negativas de b .

De facto, fixada uma base b , cada número real escreve-se como uma soma

$$A_n b^n + A_{n-1} b^{n-1} + \dots + A_1 b^1 + A_0 b^0 + a_1 b^{-1} + a_2 b^{-2} + \dots + a_m b^{-m} + \dots$$

onde os A_j 's e os a_i 's pertencem ao alfabeto $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Por exemplo, $1/2 = 0.5$ na base 10, isto é,

$$1/2 = 5 \times 10^{-1}; \quad 1/3 = 0.33\dots = 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + \dots$$

Reciprocamente, toda a escrita numa base b representa um número real. Contudo, não podemos deduzir das afirmações que conhecemos a representação na base b de todos os números reais. Na verdade, em geral, só conhecemos as dos números racionais, para os quais há um algoritmo (o da divisão) que as determina explicitamente.

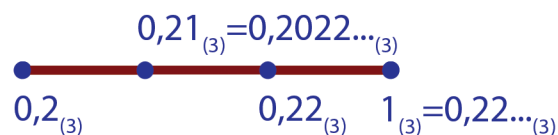
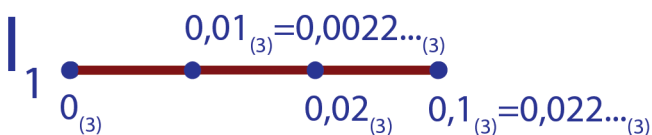
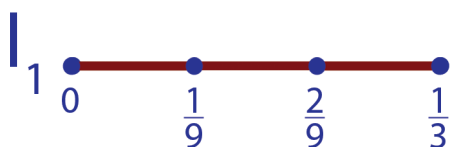
Para simplificação de linguagem, de agora em diante, quando representarmos um número numa base que não a 10, escreveremos à sua frente, entre parêntesis e em índice, a base a que nos referimos. Por exemplo,

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots_{(3)}$$

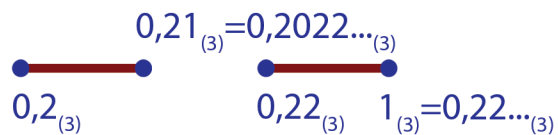
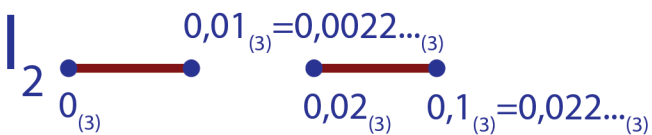
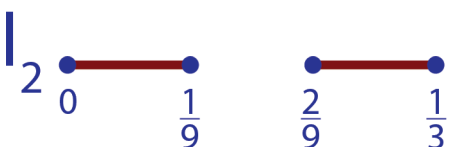
é a representação de um número real em base 3.

Base 3

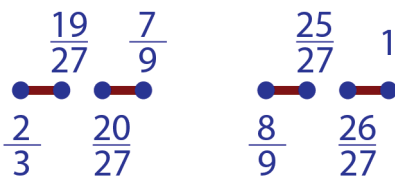
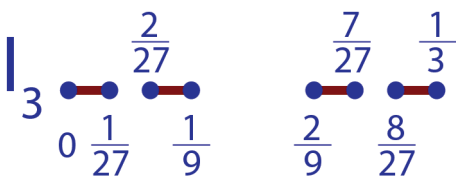
Cada vez que iteramos o processo empregue para a construção do conjunto ternário de Cantor C , subdividimos os subintervalos que vão sobrando do corte em três partes iguais e excluimos o terço médio.



4.47



4.48



4.49

Ora, os números do intervalo $[0,1]$ podem ser escritos na forma

$$0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots_{(3)},$$

em que cada a_i (independentemente do valor do i) pertence ao alfabeto de três dígitos $\{0, 1, 2\}$.

Quando excluimos o terço médio $]1/3,2/3[$, restam-nos os reais de $[0,1/3]$ e os de $[2/3,1]$. Ora, na base 3,

$$0=0_{(3)}; \quad 1/3=0,1_{(3)}=0,0222\dots_{(3)};$$

$$2/3=0,2_{(3)} \text{ e } 1=1_{(3)}=0,2222\dots_{(3)},$$

e todos os outros números de $]0,1/3[$ admitem uma representação nesta base da forma:

$$0.0a_2a_3\dots_{(3)}$$

e os de $]2/3,1[$ têm uma escrita, na base 3, do tipo

$$0.2a_2a_3\dots_{(3)},$$

onde a_2, a_3, \dots , são elementos de $\{0,1,2\}$.

Além disso, os reais de $]1/3,2/3[$ precisam, para a sua representação em base 3, de uma escrita do tipo

$$0,1a_2a_3\dots_{(3)},$$

uma vez que são estritamente maiores que $1/3$ e menores que $2/3$.

Em resumo, os elementos de I_1 são precisamente aqueles que, em base 3, admitem uma, e de facto uma só, representação com 0 ou 2 na primeira casa. Ou seja, ao excluirmos o terço médio, eliminamos os números de $[0,1]$ que precisam, para se escreverem na base 3, do dígito 1 na primeira casa.

Os elementos de I_2 estão na união dos subintervalos $[0,1/9]$, $[2/9,1/3]$, $[2/3,7/9]$, $[8/9,1]$ e, por conseguinte, podem escrever-se, em base 3, na forma

$$0,00a_3a_4a_5\dots_{(3)}, \text{ se em } [0,1/9],$$

$$0,02a_3a_4a_5\dots_{(3)}, \text{ se em } [2/9,1/3],$$

$$0,20a_3a_4a_5\dots_{(3)}, \text{ se em } [2/3,7/9],$$

$$0,22a_3a_4a_5\dots_{(3)}, \text{ se em } [8/9,1].$$

Note-se que devemos ter em consideração que

$$1/9 = 0,01_{(3)} = 0,00222\dots_{(3)}$$

$$2/9 = 0,02_{(3)}$$

$$7/9 = 2/3 + 1/9 = 0,2_{(3)} + 0,01_{(3)} = 0,2_{(3)} + 0,00222\dots_{(3)} = 0,20222\dots_{(3)}$$

$$8/9 = 2/3 + 2/9 = 0,2_{(3)} + 0,02_{(3)} = 0,22_{(3)}$$

Ao excluirmos os terços médios de $]1/9,2/9[$ e $]7/9,8/9[$, eliminámos os números reais de $[0,1]$ que precisam, para se escreverem na base 3, do dígito 1 na segunda casa.

Procedendo indutivamente, concluímos que o conjunto ternário de Cantor é o conjunto dos números reais de $[0,1]$ que se podem escrever, em base 3, na forma

$$0,a_1a_2\dots a_n\dots_{(3)},$$

em que todos os a_i 's são iguais a 0 ou a 2. E, na verdade, esta escrita é única.

Infinito

Um conjunto A diz-se *infinito* se e só se existe uma bijecção entre A e um seu subconjunto próprio; caso contrário, diz-se finito. Por exemplo, $\{0, 1, \dots, 9\}$ é finito; \mathbb{N} é infinito, pois a aplicação que leva cada número natural n em $2n$ é uma bijecção entre este conjunto e o seu subconjunto dos números pares.

Esperamos agora que qualquer conjunto que possua um subconjunto infinito seja, ele próprio, infinito. E, com efeito, se A é um conjunto infinito, $f: A \mapsto A'$ é uma bijecção entre A e uma sua parte própria A' e B é um conjunto que contém A , então, tomando a função

$$\begin{aligned} g: B &\mapsto (B \setminus A) \cup A' \\ x \in B \setminus A &\mapsto x \\ x \in A &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

obtemos uma bijecção entre B e a sua parte própria $(B \setminus A) \cup A'$, pelo que B é infinito, o que nos leva, em particular, a concluir que \mathbb{Z} , \mathbb{Q} (o conjunto dos números racionais) e \mathbb{R} (o conjunto dos números reais) são infinitos, já que todos eles contêm \mathbb{N} .

Um conjunto equipotente a \mathbb{N} , isto é, tal que existe uma bijecção entre ele e o conjunto dos naturais, diz-se *numerável*: os seus elementos podem ser enumerados numa sucessão.

O conjunto ternário de Cantor C contém o conjunto numerável $\{1/3^n: n \in \mathbb{N}\}$ e, por conseguinte, é infinito.

Resta-nos verificar se C é numerável. A primeira resolução desta questão foi de Georg Cantor e o argumento é o seguinte - considere-se uma qualquer sucessão de elementos de C : $(c_n)_n$. Como vimos, cada c_n tem uma e uma só representação

$$0, c_{1n} c_{2n} \dots_{(3)}$$

na base 3 onde só figuram os dígitos 0 e 2. Construa-se o número real y , escolhendo, para a sua escrita em base 3,

$0, y_1 y_2 \dots_{(3)}$, apenas os dígitos 0 ou 2, mas de modo que $y_1 \neq c_{11}$, $y_2 \neq c_{21}$, ..., $y_n \neq c_{nn}$, etc.

O número y pertence a C pois tem escrita na base 3 só com os dígitos 0 e 2. Contudo, difere de c_1 , pois a escrita na base 3 com esta propriedade é única e $y_1 \neq c_{1,1}$. Analogamente, y e c_n são diferentes para todo o n . Daqui decorre que, independentemente da sucessão que seleccionemos, existe um elemento de C que não consta de tal sucessão, pelo que o conjunto de Cantor é não numerável.

Um jogo

A não numerabilidade do conjunto de Cantor pode ser demonstrada recorrendo a um jogo. Vejamos como.

Os dois participantes do jogo, que designaremos por A e B, começam por escolher um subconjunto \mathcal{D} de $[0,1]$. De seguida, o 1º jogador, A, selecciona um número qualquer a_1 entre 0 e 1 e o segundo jogador, B, um outro número b_1 compreendido entre a_1 e 1. Porque existe b_1 nestas condições? Por exemplo, a média aritmética entre a_1 e 1 pertence a $]a_1, 1[$. Prosseguem, jogando alternadamente, tendo apenas de obedecer à seguinte regra: cada um escolhe um número compreendido entre os dois últimos seleccionados e diferentes deles. Obtêm assim duas sucessões de números reais de $[0,1]$: $(a_n)_n$ estritamente crescente e $(b_n)_n$ estritamente decrescente, que verificam



fig 4.50

$$0 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < b_{n+1} < b_n < \dots < 1.$$

O facto de a sucessão $(a_n)_n$ ser crescente e majorada (por exemplo, por 1) garante que ela converge para um número α de $[0,1]$, que verifica

$$0 < a_n < \alpha < b_n < 1,$$

para todo o n . E a vitória no jogo depende apenas deste valor: ganha o jogador A se α for um elemento de \mathcal{D} ; caso contrário, ganha B.

4.51

$$\mathcal{D} = \emptyset.$$

α não é um elemento de \mathcal{D} , pelo que **B vence**.

4.52

$$\mathcal{D} = [0, 1].$$

A vence porque α pertence a $[0, 1]$: a relação de ordem $0 \leq a_n \leq 1$, para todo n , é herdada pelo limite α .

4.53

$$\mathcal{D} = \{1/2\}.$$

B tem uma estratégia vencedora.

Após A seleccionar um número a_1 , podem ocorrer duas situações: se a_1 for maior ou igual a $1/2$, B ganha imediatamente o jogo porque $\alpha > a_1$. Caso contrário, B escolhe um b_1 em $]a_1, 1/2[$. Como, $\alpha < b_1 < 1/2$, A perde o jogo.

4.54

$$\mathcal{D} =]1/4, 1/2[.$$

A tem estratégia vencedora.

A escolhe um número a_1 de $]1/4, 3/8[$. Por causa disso, B só pode escolher números maiores que $1/4$ e portanto, em todas as jogadas, A pode seleccionar um número do intervalo $]1/4, 3/8[$ inferior ao último seleccionado por B. Tem-se, então, $1/4 < \alpha \leq 3/8 < 1/2$, e A vence.

Observe-se que o método empregue pode ser adaptado a qualquer intervalo não vazio e não degenerado que escolhamos.

4.55

$$\mathcal{D} = \{1/n : n \text{ número natural}\}.$$

B tem estratégia vencedora.

Após a escolha de a_1 , podem ocorrer dois cenários: se $a_1 \geq 1/2$, B ganha porque $1/2 < a_1 < \alpha < b_1 < 1$ e

$$\mathcal{D} \cap]1/2, 1[= \emptyset.$$

Caso contrário $1/a_1 > 2$ e B escolhe b_1 igual ao menor número de \mathcal{D} que é maior do que a_1 (ou seja, $b_1 = 1/n$, onde n é o único natural que pertence a $[1/a_1 - 1, 1/a_1[$).

Como $a_1 < \alpha < b_1$, o método de escolha de b_1 garante que α não é um elemento de \mathcal{D} .

O processo aqui empregue pode ser adaptado a qualquer subconjunto finito \mathcal{D} de $[0, 1]$.

Joguemos então. Na página anterior, escolheram-se alguns conjuntos \mathcal{D} e podemos ler as jogadas sucessivas, admitindo que cada jogador faz o possível por ganhar.

Note-se que, quando $\mathcal{D}=\emptyset$ (4.51), o jogador B ganha quaisquer que sejam as jogadas de ambos os jogadores; analogamente, quando $\mathcal{D}=[0,1]$, ganha sempre A. Dizemos que um jogador tem *estratégia vencedora* se puder escolher as jogadas que o levam à vitória, independentemente das opções do outro.

Se o subconjunto escolhido \mathcal{D} for numerável, os seus elementos podem ser escritos na forma de uma sucessão, $(d_n)_n$. Verificaremos que, neste cenário, B é detentor de estratégia vencedora, bastando para isso garantir que d_n não pertence ao intervalo $]a_n, b_n[$, para nenhum n . Em geral, B escolhe $b_n = d_n$ se esta for uma jogada permitida (isto é, se $a_n < d_n < b_{n-1}$) ou, caso contrário, escolhe b_n entre a_n e b_{n-1} . Deste modo, para cada n , $a_n \geq d_n$ ou $b_n \leq d_n$. Ora, como α está em $]a_n, b_n[$, para todo o n , concluímos que α não pertence a \mathcal{D} e B vence. Do que provámos, podemos retirar outra conclusão pertinente: $[0,1]$ é não numerável, uma vez que o jogador A vence se $\mathcal{D}=[0,1]$.

O jogo também nos permite provar que o conjunto de Cantor não é numerável.

Provemos que C também não é numerável, exibindo uma estratégia vencedora para o jogador A:

1º) A escolhe $a_1 = 0.2_{(3)}$.

2º) Depois da selecção de b_1 , o jogador A procura um número k_1 de zeros por forma que

$$b_1 > 0.\underbrace{200\dots 0}_{k_1}2_{(3)}.$$

A escolhe então

$$a_2 = 0.\underbrace{200\dots 0}_{k_1}2_{(3)}.$$

Note-se que o número k_1 existe: se b_1 , na sua representação em base 3, for da forma

$$0,22a_3a_4\dots$$

basta escolher $k_1=1$; caso contrário, como b_1 é estritamente maior que a_1 , devemos ter

$$b_1 = 0,2a_2a_3\dots_{(3)}, \text{ onde } a_i \in \{0, 1, 2\};$$

então existe n , natural, tal que

$$b_1 = 0, \underbrace{200\dots 0}_n x a_{n+3}a_{n+4}\dots_{(3)} \text{ e } x = 1 \vee x = 2;$$

nestas circunstâncias, basta tomar $k_1=n+1$.

3º) depois da escolha de b_2 , o jogador A encontra um número k_2 de zeros tal que

$$b_2 > 0.\underbrace{200\dots 0}_{k_1}\underbrace{200\dots 0}_{k_2}2_{(3)}$$

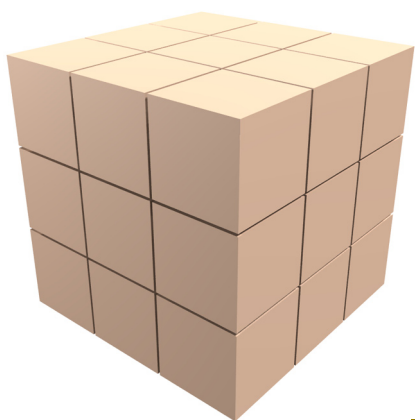
e escolhe

$$a_3 = 0.\underbrace{200\dots 0}_{k_1}\underbrace{200\dots 0}_{k_2}2_{(3)}.$$

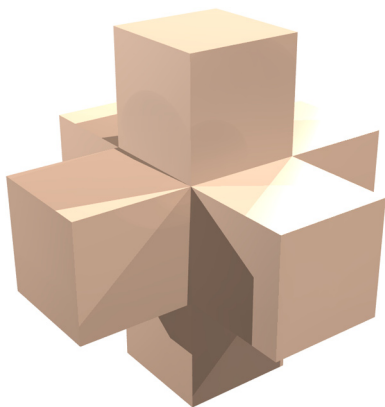
Iterando o processo descrito, A obtém uma sucessão estritamente crescente de elementos de C , cujos números são todos inferiores aos escolhidos por B e que tende para um número α que admite uma representação em base 3 cujos únicos dígitos são 0 e 2:

$$\alpha = 0.\underbrace{200\dots 0}_{k_1}\underbrace{200\dots 0}_{k_2}\underbrace{200\dots 0}_{k_3}2\dots_{(3)}.$$

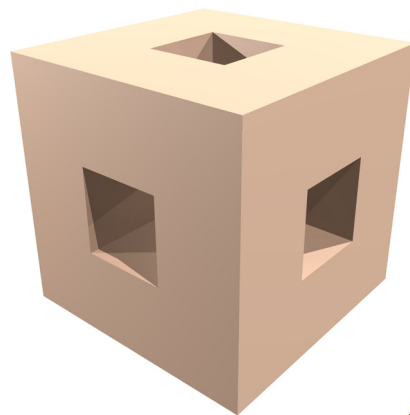
α é portanto um elemento de C e A tem, pois, uma estratégia vencedora, pelo que o conjunto de Cantor não é numerável.



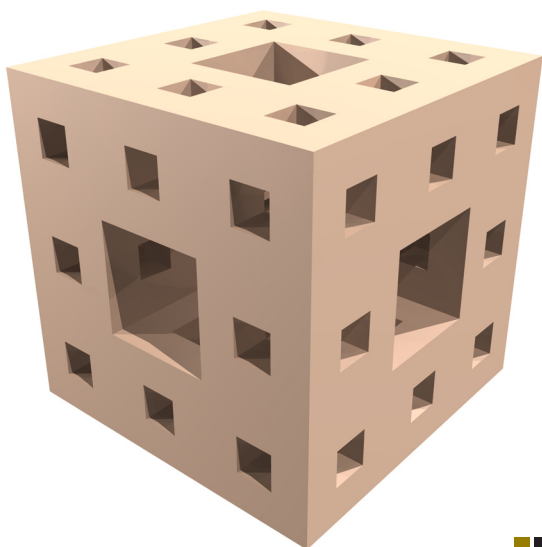
4.56



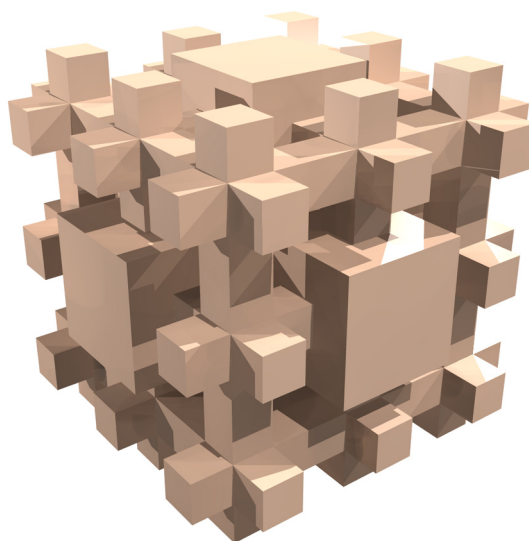
4.57



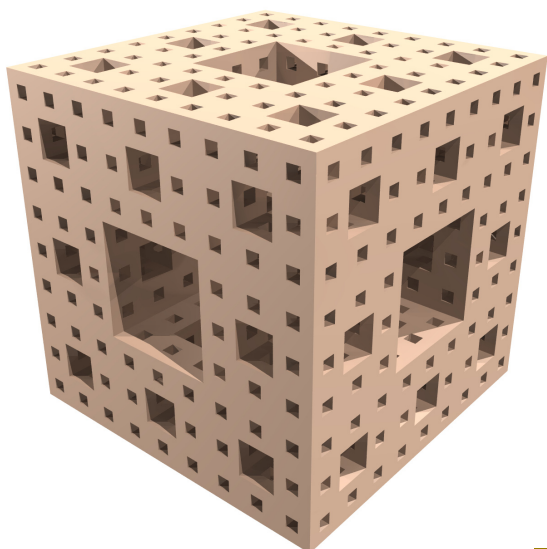
4.58



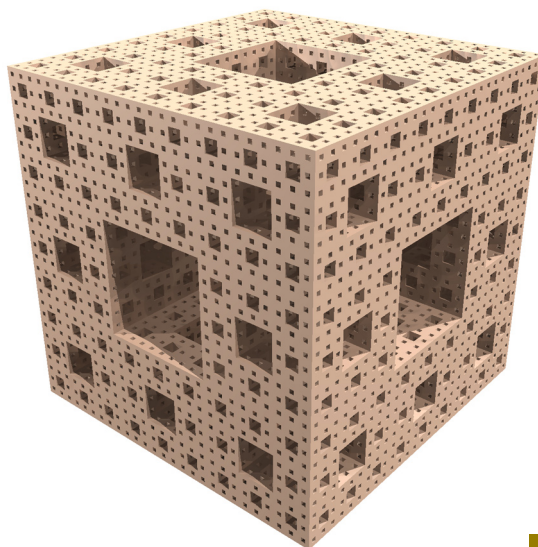
4.59



4.60



4.61



4.62

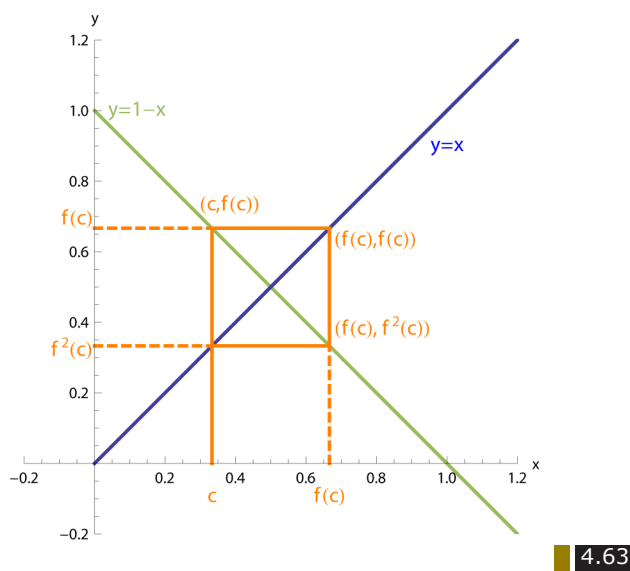
Breve digressão por fractais

Um aspecto geométrico que sobressai na aproximação T_2 do triângulo de Sierpinski S (fig 4.13) é que T_2 é a reunião de três cópias do triângulo original T , depois de este ser reduzido por uma homotetia de razão $1/2$. Do mesmo modo, há partes de T_n que parecem T_{n-1} , a menos de uma mudança de escala. Esta propriedade é herdada pelo limite, o triângulo de Sierpinski S , e designa-se por *auto-semelhança*. E é ela que coloca o triângulo de Sierpinski na família dos *fractais*.

O conjunto de Cantor C possui uma propriedade semelhante: uma lupa num dos subintervalos de I_n (fig 4.45) revela, depois da etapa $n+1$, a mesma forma que I_n , se excluirmos uma mudança de escala. De novo, esta característica é herdada pelo limite C , o que significa que a distribuição em $[0,1]$ dos elementos de C o tornam auto-semelhante: para qualquer n natural, uma lupa em $C \cap [0,1/3^n]$, que permita ampliar à escala 3^n , reproduz todo o conjunto C .

Esta característica, a auto-semelhança, pode rever-se num objecto construído de modo análogo a C e a S mas em dimensão 3. Observemos que um cubo de lado 1 pode ser dividido em 27 cubos mais pequenos e iguais, conforme explicitado na figura 4.56. Retirando os sete cubos que não contêm qualquer parte das arestas do cubo inicial (fig 4.57), obtemos uma união de 20 cubos de lado $1/3$ (fig 4.58).

Repetindo o processo anterior para cada um desses cubos, construímos a segunda geração de figuras (figs 4.59 e 4.60) e assim sucessivamente (figs 4.61 e 4.62). A intersecção de todos os conjuntos assim obtidos designa-se por *cubo de Sierpinski*. Do processo de construção adoptado decorre que, em cada etapa, sobra uma figura igual a $20/27$ do objecto anterior. No limite, e como a sucessão $((20/27)^n)_n$ tende para zero, obtém-se uma figura tridimensional cujo volume é nulo.

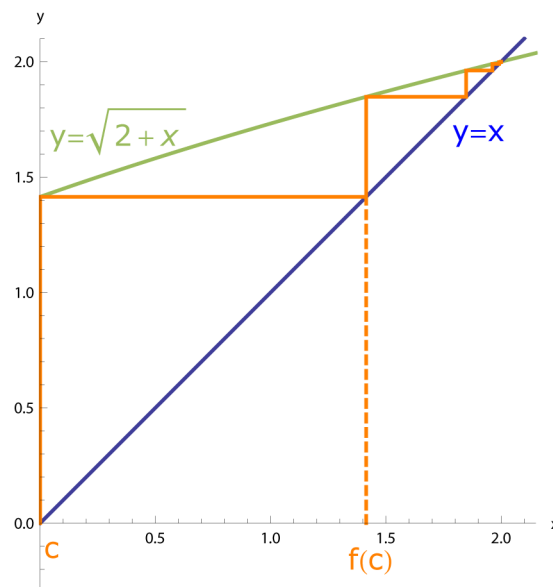
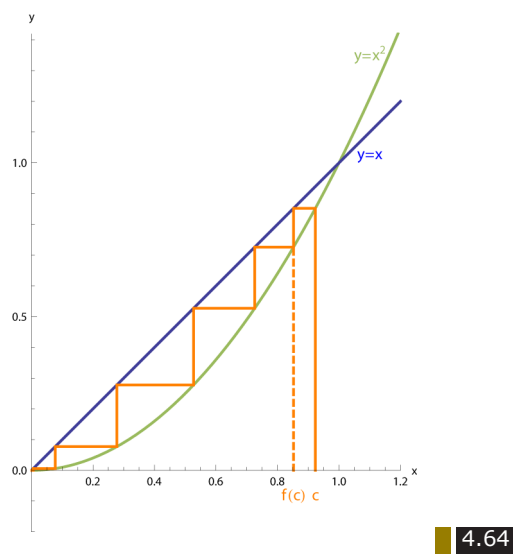


Designemos o gráfico de f por $\text{graf}(f)$.

Nas figuras ao lado, estão representados os gráficos de uma função f (a verde), da identidade (a azul) e de uma linha poligonal (a laranja). Vejamos como se construiu esta última linha.

Uniu-se um ponto inicial, $(c,0)$, ao ponto $(c,f(c))$. Em seguida determinou-se, no gráfico da identidade, o ponto de coordenadas $(f(c),f(c))$. Projectou-se no eixo dos x 's este último ponto (ver linha a tracejado), obtendo-se $(f(c),0)$. Em seguida encontrou-se, no gráfico de f , a imagem deste novo ponto, de coordenadas $(f(c),f^2(c))$, e procurou-se o ponto de coordenadas $(f^2(c),f^2(c))$. A linha poligonal obtém-se iterando sucessivamente o processo descrito.

A inclusão do gráfico da identidade nestes desenhos traz duas vantagens: 1) descobrimos rapidamente se há pontos fixos da função f , os elementos de $\text{graf}(f) \cap \text{graf}(id)$; 2) permite-nos transportar rigorosamente elementos da imagem de f (no eixo dos y 's) para o domínio (no eixo dos x 's) e ver num mesmo desenho f , $f \circ f$ e a composta sucessiva de f consigo mesma.



Tal também aconteceu com a soma das áreas das regiões triangulares retiradas para construir S (fig 4.17), restando-lhe “área” 0, também a soma dos comprimentos dos intervalos excluídos de $[0,1]$ na construção de C é 1, e portanto C tem “comprimento” 0.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = \frac{1}{3}(1 + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} + \dots) = 1,$$

Este aspecto é explorado na banda desenhada *Les fractals*, ([S]), de que aconselhamos a leitura na íntegra.

Mas estes não são os fractais mais famosos: os de maior glória estão associados à família de polinómios quadráticos $F_c: x \in \mathbb{C} \rightarrow x^2 + c$, onde c é um parâmetro de \mathbb{C} , e à operação de composição de funções. Vamos conhecer um deles.

Dada uma aplicação $f: X \rightarrow X$, como a imagem está contida no domínio, podemos considerar a função $(f \circ f): X \rightarrow X$ (composta de f com f) que a cada x em X associa $f(f(x))$. E, em geral, podemos compor f consigo mesma n vezes, n natural qualquer, obtendo uma nova função que denotaremos por f^n . Por exemplo:

a) se $f(x) = 1 - x$, $x \in [0,1]$, então, para $x = 1/2$, $f^n(x) = 1/2$ para todo o n ;

se $x \neq 1/2$, $f^n(x) = 1 - x$ e $f^n(x) = x$, conforme n seja ímpar ou par (fig 4.63).

b) Se $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, então, $f^n(x) = (x^2)^n$, para todo o n .

Portanto, com a excepção de $x = 1$ (porque $f^n(1) = 1$ para todo o n), a sucessão $(f^n(x))_n$ converge para 0 (fig 4.64).

c) Se $f(x) = (2+x)^{1/2}$, com $x \in [0, +\infty[$, é mais difícil explicitar $(f^n(x))_n$. Por exemplo,

$$(f^n(0))_n = ((2 + (2 + (2 + \dots + (2 + 2^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})_n.$$

No gráfico (fig 4.65), esta sucessão aparenta ser estritamente crescente e convergente para 2. Comprovemos que assim é.

Começemos por determinar os pontos fixos de f , isto é, as soluções do sistema

$$x \geq 0 \wedge f(x) = x.$$

Obtemos $x=2$. Consideremos agora o ponto inicial 0.

Como f é função estritamente crescente (basta observar que

$$f'(x) = 1/2(2+x)^{-1/2},$$

e, portanto, a derivada é sempre positiva), de $0 < 2^{1/2}$ obtém-se $f(0) < f(2^{1/2}) = f^2(0)$. Donde se conclui, em particular, que

$$f(0) < f^2(0) < f^3(0) < \dots,$$

isto é, a sucessão indicada é estritamente crescente.

Por outro lado, de $0 < 2$ deduz-se que $f(0) < f(2) = 2$ (2 é um ponto fixo). O mesmo argumento leva-nos a concluir que $f^n(0) < 2$, para todo o n , e, portanto, a sucessão é majorada pelo número 2. As duas conclusões mencionadas - o facto de a sucessão ser estritamente crescente e majorada - permitem-nos deduzir que ela converge. Será 2 o seu limite?

Podemos adiantar que o limite da sucessão será necessariamente um ponto fixo da função. Vejamos porquê. Verificámos já que a sucessão $(f^n(0))_n$ converge para algum número L . Sendo f contínua, então $f(f^n(0))$ converge para $f(L)$, i.e., a subsucessão $(f^{n+1}(0))_n$ converge para $f(L)$. Mas o limite desta subsucessão coincide com o de $(f^n(0))_n$ e é, portanto, L . Deduz-se assim que $f(L) = L$. Ora, como o único ponto fixo da função considerada é o 2, resulta que a sucessão apresentada converge para 2.

Na página seguinte, apresentaremos outro exemplo.



$1/x > 1/y$ e pertanto $1 + 1/x > 1 + 1/y$.

$$f^{2n-1}(1) > f^{2n+1}(1) \text{ e } f^{2n}(1) < f^{2n+2}(1), \text{ para todo } n.$$
$$f(1)=2 \text{ e } f^3(1)=5/3$$
$$f(1) > f^3(1)$$
$$f^2(1) < f^4(1), f^3(1) > f^5(1), \dots$$

Que outras conclusões se podem tirar sobre $(f^n(1))_n$?

$$\Phi = f^{2n-1}(\Phi) < f^{2n-1}(1), \text{ para todo o } n.$$

151

Analiseemos novamente o gráfico anterior: ele sugere que os termos consecutivos da sucessão $(f^n(1))_n$ se estão a aproximar entre si, isto é, que a diferença entre eles diminui à medida que o n aumenta. Provemos isso. Considerando $n \geq 2$, podemos restringir o estudo de $(f^n(1))_n$ ao intervalo $[f^2(1), 2]$, ou seja, a $[1.5, 2]$; além disso,

$$|f^{2n+1}(1) - f^{2n}(1)| = |f(f^{2n}(1)) - f(f^{2n-1}(1))|.$$

Ora, a diferença entre duas imagens $f(a)$ e $f(b)$ da função f pode comparar-se com a distância de a a b (é o enunciado do Teorema de Cauchy): existe $c \in]1.5, 2[$ tal que

$$|f(f^{2n}(1)) - f(f^{2n-1}(1))| = |f'(c)| |f^{2n}(1) - f^{2n-1}(1)|.$$

Por outro lado, e porque $|f'(x)| = 1/x^2$ é decrescente, tem-se $|f'(c)| \leq |f'(1.5)| = 4/9$. E, portanto,

$$|f^{2n+1}(1) - f^{2n}(1)| \leq 4/9 |f^{2n}(1) - f^{2n-1}(1)|.$$

Iterando o argumento anterior, obtemos

$$|f^{2n+1}(1) - f^{2n}(1)| \leq (4/9)^{2n-2} |f^3(1) - f^2(1)| = (4/9)^{2n-2} \times (1/6).$$

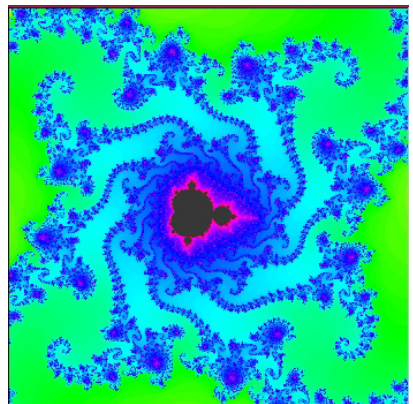
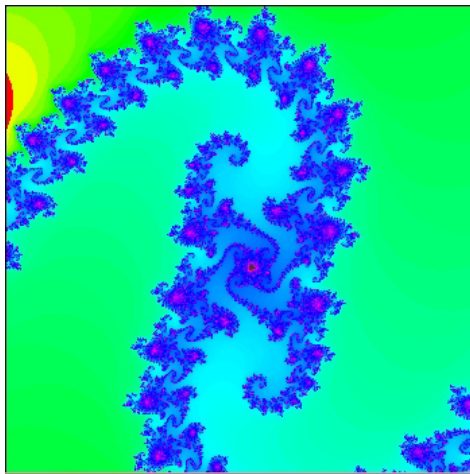
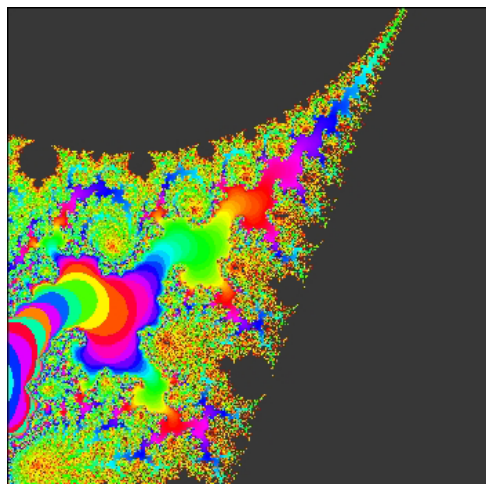
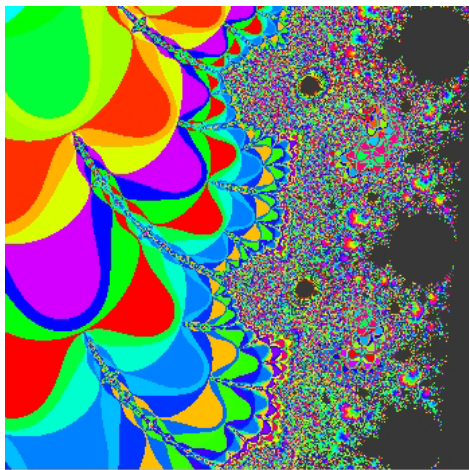
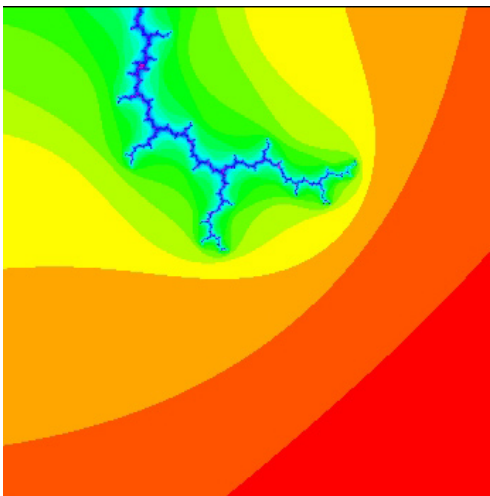
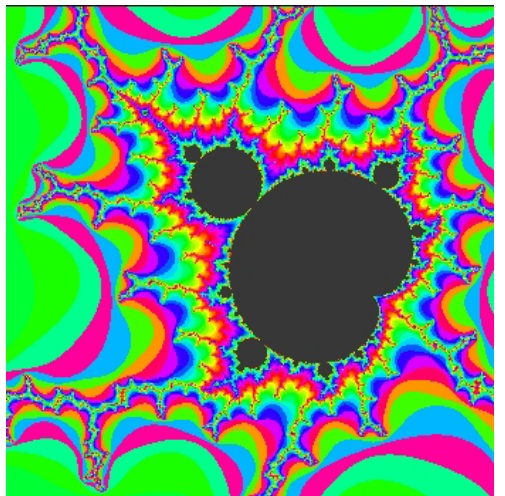
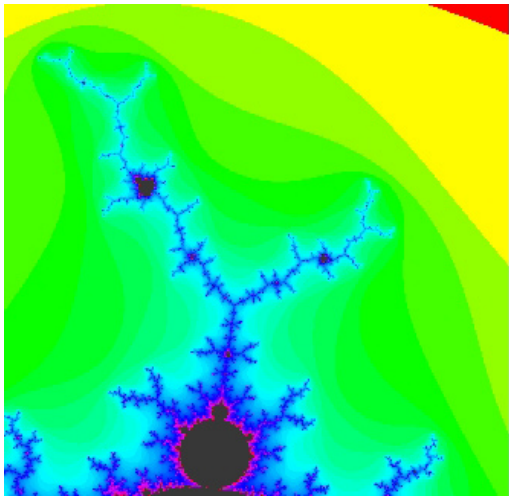
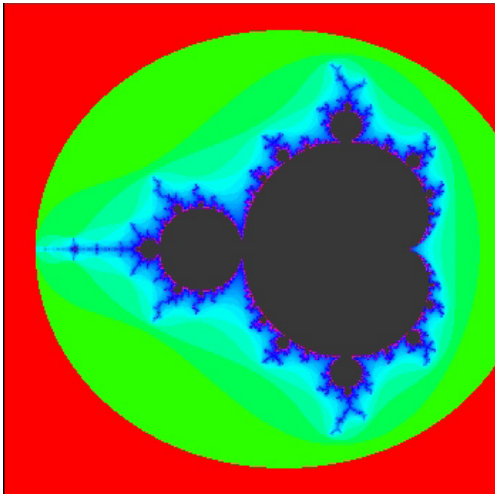
Como a sucessão

$$(4/9)^{2n-2} \times (1/6)$$

tem limite zero, conclui-se que a diferença entre termos consecutivos da sucessão $(f^n(1))_n$ tende para 0, quando n tende para infinito, o que nos garante que a sucessão converge e o limite é precisamente o único número compreendido entre dois quaisquer termos consecutivos dessa sucessão: o número de ouro.

No que se segue, apresentaremos algumas propriedades de $(F_c^n(0))_n$, onde

$F_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ envia $z \in \mathbb{C}$ em $z^2 + c$, com c parâmetro de \mathbb{C} .



Conjunto de Mandelbrot

Nos anos sessenta do século XX, Benoît Mandelbrot elaborou um programa informático que lhe permitiu desenhar um esboço do conjunto

$$M = \{c \in \mathbb{C} : (F_c^n(0))_n \text{ é uma sucessão limitada de } \mathbb{C}\}.$$

[Recorde-se que uma sucessão $(z_n)_n$ de números complexos diz-se limitada se existir um real $R > 0$ tal que $||z_n|| < R$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, onde $||.||$ designa a distância usual no plano de z_n a $(0,0)$.]

As figuras ao lado mostram detalhes da estrutura de M . É fácil verificar que M é simétrico relativamente ao eixo dos x 's, uma vez que, se $z \in M$ (isto é, se a sucessão

$$0, z, z^2+z, (z^2+z)^2+z, \dots$$

é limitada), então o conjugado \bar{z} de z também pertence a M , pois

$$0, \bar{z}, \bar{z}^2+\bar{z}, (\bar{z}^2+\bar{z})^2+\bar{z}, \dots$$

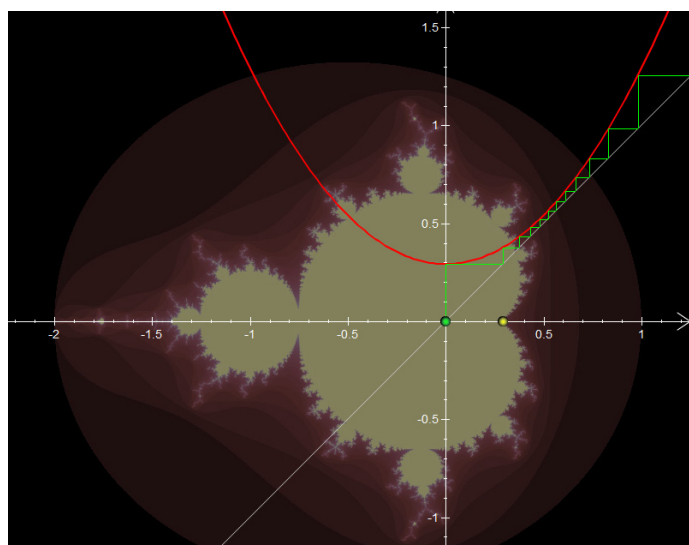
coincide com

$$0, \bar{z}, \overline{z^2+z}, \overline{(z^2+z)^2+z}, \dots$$

que é também limitada. E, com um pouco mais de esforço, pode provar-se que $M \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$.

Nas imagens seguintes, visualizam-se o conjunto M , o c de $M \cap \mathbb{R}$ escolhido e os primeiros termos da sucessão $(F_c^n(0))_n$, a verde.

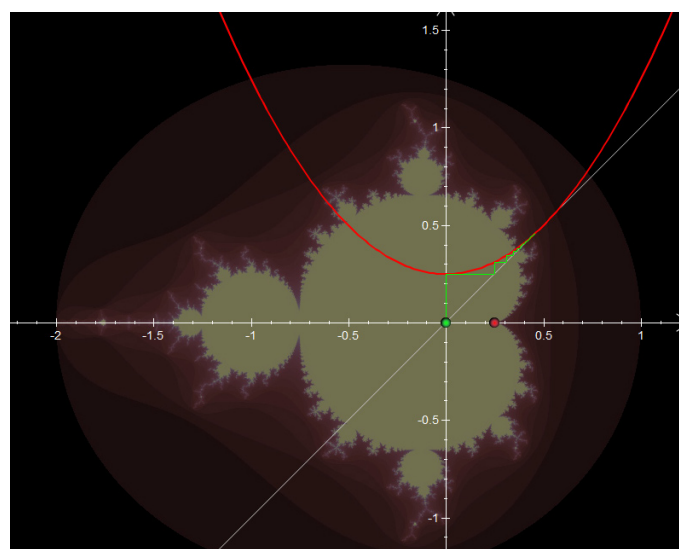
Sabe-se que M não é auto-semelhante (embora pareça), mas a sua estrutura é suficientemente complicada para justificar a sua inclusão na família dos fractais - embora, para tal, tivesse sido necessário redefinir esta noção. Podem ler-se mais detalhes em [F1] ou [F2].



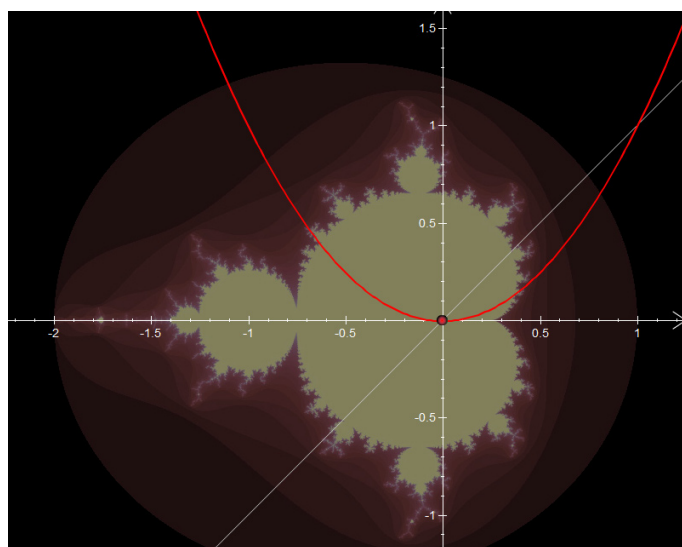
4.68 Neste caso, considerou-se um real $c > 1/4$. A vermelho encontra-se representado o gráfico, em \mathbb{R} , de F_c . Repare-se que a sucessão $(F_c^n(0))_n$ não é limitada.

4.68

4.69 $c = 1/4$ é o maior número real para o qual a sucessão $(F_c^n(0))_n$ é convergente. O seu limite é o ponto fixo da função (restrita a \mathbb{R}) $F_{1/4}(x) = x^2 + 1/4$, ou seja, $1/2$.



4.69

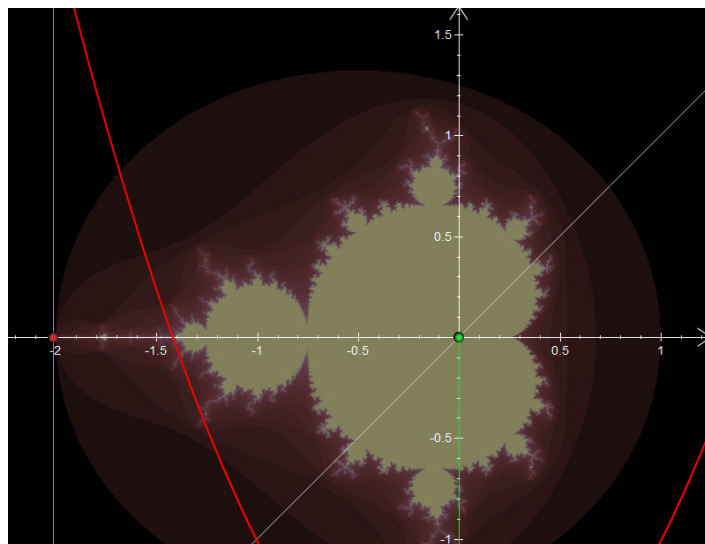
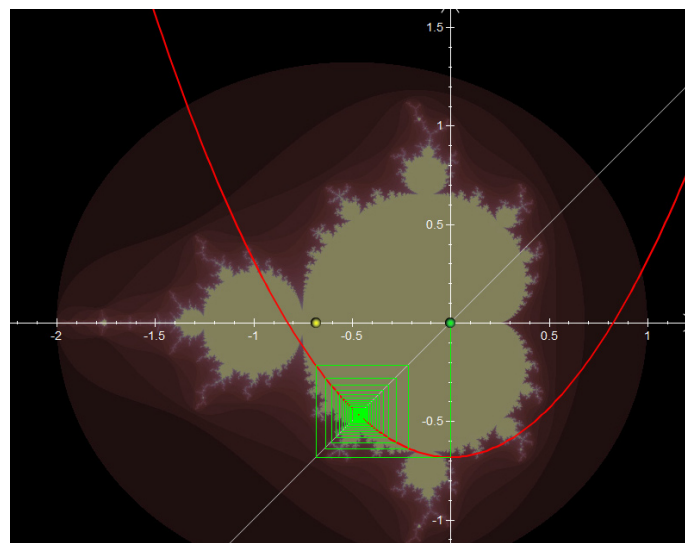


4.70 Para $c = 0$, a sucessão $(F_0^n(0))_n$ é constante e igual a 0.

4.70

4.71 Para c compreendido entre 0 e -2, a sucessão $(F_c^n(0))_n$ é limitada, podendo ou não convergir.

4.71

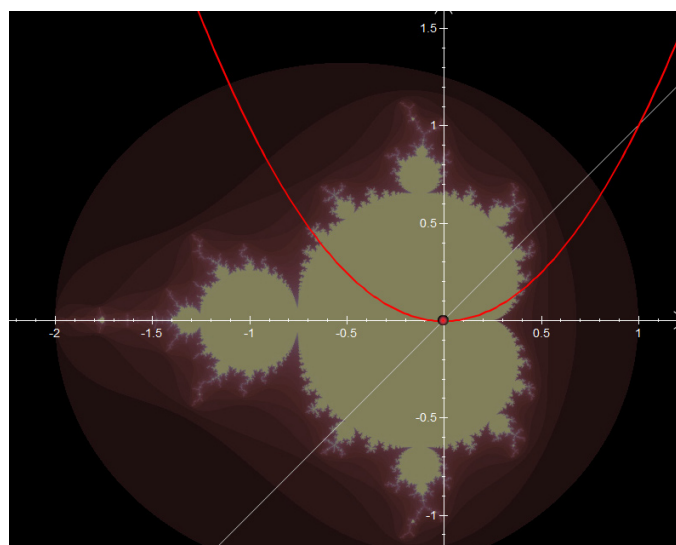


4.72 Para $c=-2$, tem-se $F_c^{-1}(0)=-2$ e $F_c^n(0)=2$, para todo $n>1$.

4.72

4.73 Para $c<-2$, a sucessão $(F_c^n(0))_n$ não é limitada e portanto $c \notin M$.

4.73



Bibliografia

- [A] Araújo, P.V., *Curso de Geometria*, Gradiva, 1998.
- [At] Atractor, *Atractor de Sierpinski*, Gazeta de Matemática, nº 163, 4-6, 2011.
- [BR] Barnsley, M. F., Rising, H., *Fractals Everywhere*, Academic Press, 2ª edição, 1993.
- [BCCFGSV] Bellingeri, P., Cazzola A., Cereda P., Frigerio, E., Gide, A., Saltini, P.T., Vezzani, C., *Simetria - jogos de espelhos, documentação sobre a exposição homónima*, Atractor.
- [Be1] Berger, M., *Geometry I*, 2ª edição, tradução para inglês de M. Cole e S. Levy, Springer, 1994.
- [Be2] Berger, M., *Geometry II*, 2ª edição, tradução para inglês de M. Cole e S. Levy, Springer, 1996.
- [Bk] Bkouche, R., Lehmann, D., *Initiation à la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1988.
- [Bo] Bonnesen, T., Fenchel, W., *Theory of convex bodies*, BCS Associates, 1987.
- [BCG] Burgiel, H., Conway, J., Goodman-Strauss, C., *The Symmetries of Things*, A K Peters Lda, 2008.
- [CO] Carvalho, M., Oliveira, A. C., *Estradas para rodas exóticas*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, nº 65, 1-17, Outubro de 2011.
- [C] Casey, J., *Perfect and Not-so-Perfect Rollers*, The Mathematics Teacher 01, 12-20, 1998.
- [CG] Conti, F., Giusti, E., *Oltre Il Compasso, La geometria delle curve*, Il Giardino di Archimede, 2000.
- [Cr] Crato, N., *A Matemática das Coisas*, Gradiva, 2008.
- [D] Dedò, M., *Camere di Specchi e Caleidoscopi: perché solo sei?*, La Matematica nella vita quotidiana, Mimesis, 2002.
- [F1] Falconer, K.J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
- [F2] Falconer, K.J., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley, 1990.
- [G] Gardner, M., *The colossal book of mathematics*, W. W. Norton, 2001.
- [HW] Hall, L., Wagon, S., *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, Vol. 65, nº 5, 283-301, 1992.
- [H] Honsberger, R., *Ingenuity in Mathematics*, Mathematical Association of America, New Mathematical Library 23, 1970.
- [J] Jennings, G., *Modern Geometry with Applications*, 3ª edição, Springer-Verlag New York, 1997.
- [L] Lebesgue, H., *Les Coniques*, Gauthier-Villars, 1942.
- [N] Niven, I., *Maxima and minima without calculus*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions 6, 1981.
- [NS] Novikov, D., Saint-Aubin, C., *Les Sphères de Dandelin*, Accromath, Vol. 6, 4-7, 2011.

- [O1] Oliveira, A. C., *Matematica nel calcio*, XlaTangente, nº 21, 10-11, Junho de 2010.
- [O2] Oliveira, A. C., *Con un giro di ruota*, XlaTangente, nº 22, 10-11, Agosto de 2010.
- [O3] Oliveira, A. C., *O que é uma cónica?*, Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática, nº 117, 22-25, Março-Abril de 2012.
- [R] Rademacher, H., Toeplitz, O., *The Enjoyment of Mathematics*, Dover, New York, 1990.
- [Ri] Ritt J. F., *Integration in finite terms: Liouville's theory of elementary methods*, Columbia University Press, 1948.
- [Ro] Robison, G., *Rockers and rollers*, Mathematics Magazine 33, 139–144, 1960.
- [S] Stewart, I., *Les Fractals*, Éditions Bélin, 1982.
- [W] Wagon, S., *Mathematica in Action*, W. H. Freeman, 1991.
- [Wi] Wilson, A. M., *The Infinite in the Finite*, Oxford University Press, 1995.
- [V] Veloso, E., *Geometria, temas actuais*, Instituto de Inovação Institucional, 1998.

Endereços de sites utilizados

- [web1] <http://www.atractor.pt/mat/curvtor>
- [web2] <http://www.atractor.pt/matviva>
- [web3] <http://www.atractor.pt/matviva/geral/B/B05/b5.htm>
- [web4] <http://www.atractor.pt/matviva/geral/sierpinski>
- [web5] <http://www.atractor.pt/simetria>
- [web6] <http://www.atractor.pt/ujr/acti2005.htm>
- [web7] <http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbconics.htm>
- [web8] <http://www.lhspzz.org/e-eswl-add2.htm>

Ficha técnica

Imagens

- Pertencentes ao espólio do Atrator:
 - imagem patente na capa do livro,
 - imagens patentes na capa do primeiro, segundo e quarto capítulos,
 - imagens patentes nas sub-capas existentes nas páginas 20, 26 e 35,
 - 1.1, 1.4 - 1.25, 1.27 - 1.30, 1.39, 1.41 - 1.43, 1.46 - 1.63, 2.6, 2.10 - 2.11, 2.25, 2.57, 3.1 - 3.12, 3.29, 3.35, 3.57 - 3.59, 3.87 - 3.88, 4.3 - 4.5, 4.56 - 4.62, 4.67 - 4.73,
 - 1.26, 1.44, 1.45: estas imagens correspondem a traduções para português de cartazes da exposição "Simmetria, giochi di specchi"¹, criada no Departamento de Matemática "F. Enriques", em Milão, sob a responsabilidade científica da Professora Doutora Maria Dedò.
- Retiradas do espólio do Atrator, mas modificadas pela autora:
 - 2.7 - 2.9, 2.17 - 2.21.
- Imagens de autoria da fotógrafa Alexandra Faria:
 - 1.2 - 1.3, 2.2 - 2.4, 2.76 - 2.79, 3.51 - 3.53, 3.76 - 3.78, 3.80,
 - imagem patente na capa do 3º capítulo.
- Imagens de autoria do Professor Paulo Ventura Araújo:
 - fotografias patentes em 1.32.
- Imagens retiradas da internet:
 - 1.34: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Zeichen_222-20.svg
 - 2.24: <http://saoromao-lisboa.olx.pt/tapetes-rolantes-iid-191366257>
 - 2.47: <http://www.flickr.com/photos/fdecomite/6612497267>
 - 2.50: <http://blog.makezine.com/2009/09/30/how-round-is-your-circle>
 - 2.51: <http://5-line.com/images/Pictures/Vehicles/Mazda>

1 <http://specchi.mat.unimi.it/>

- 2.79: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dewy_spider_web.jpg
- 3.73: <http://www.albawaba.com/hmc-honors-cbq%E2%80%99s-role-expansion-hgh-lithotripsy-unit-379213>
- 3.74: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:St_Pauls_whispering_gallery.JPG
- 3.75: <http://www.dryastoast.com/2012/03/whispering-gallery-in-grand-central.html>
- 3.79: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solar_cooker_1.jpg
- Imagens retiradas da internet e modificadas pela autora:
 - 1.33: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Flag_of_Switzerland.svg
 - 1.35: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Zeichen_222-20.svg
 - 3.54 - 3.57: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Saldanha_Bay_WW.jpg
- As imagens não referidas foram realizadas pela autora.

Programas informáticos utilizados pela autora

- Photoshop:
 - as imagens 4.45 - 4.50 foram realizadas, na sua totalidade, no programa mencionado.
 - todas as imagens patentes neste texto foram tratadas, pela autora, no Photoshop.
- Sketchpad:
 - imagens 2.22 - 2.23.
- Flash:
 - imagem 3.84.

- Mathematica:
 - a imagem 2.49 foi realizada com recurso a um package do Mathematica,
 - as imagens 2.55 e 2.56 foram realizadas com recurso a um package do Mathematica,
 - para além do Photoshop, a manipulação das imagens 3.54 - 3.56 envolveu o programa Mathematica,
 - os cálculos efectuados no segundo capítulo para a determinação da roda associada ao triângulo de Reuleaux e o seu desenho foram realizados com o programa mencionado,
 - as imagens não mencionadas foram realizadas pela autora no programa Mathematica.

PUBLICAÇÕES

- MATEMATICA NEL CALCIO¹

Oliveira, A. C., XlaTangente, nº 21, 10-11, Junho de 2010.

- CON UN GIRO DI RUOTA²

Oliveira, A. C., XlaTangente, nº 22, 10-11, Agosto de 2010.

- ESTRADAS PARA RODAS EXÓTICAS

Carvalho, M., Oliveira, A. C., Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, nº 65, 1-17, Outubro de 2011.

- O QUE É UMA CÓNICA?

Oliveira, A. C., Educação e Matemática, APM, nº 117, 22-25, Março/Abril de 2012.

¹ Uma versão mais curta deste artigo foi publicada na coluna do Atractor na revista Gazeta de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática.

² Uma versão mais curta deste artigo foi publicada na coluna do Atractor na revista Gazeta de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática.

fuoribordo

Matematica nel calcio

di ANA CRISTINA OLIVEIRA

Dall'anno della sua fondazione, nel 1999, l'Associazione Atractor, che si occupa di divulgazione della matematica, ha sviluppato diverse attività a carattere scientifico e pedagogico. Questo articolo è basato su un exhibit interattivo che illustra alcune proprietà geometriche della circonferenza attraverso il gioco del calcio



Fig. 1

Una circonferenza è il luogo dei punti del piano che si trovano a una distanza assegnata da un punto fissato. Questa curva si caratterizza per altre proprietà di diversa natura che possono fungere allo stesso modo da definizione. Ad esempio, tra tutte le curve del piano, semplici (senza autointersezioni) e chiuse (se percorriamo la curva sempre nello stesso senso, ritorniamo al punto di partenza), è l'unica che (1) ha curvatura costante positiva¹ (2) ingloba l'area maggiore a parità di perimetro.

L'exhibit che descriviamo (Fig. 1) in queste pagine è stato proposto, nel 2005, ai giovani partecipanti, di 10/11 anni, di *Universidade Júnior*, un'iniziativa dell'Università di Porto.

Si intitola *Matematica nel calcio* e si serve del gioco del calcio per illustrare alcune altre proprietà che solo la circonferenza verifica:

(a) qualsiasi angolo² inscritto in una circonferenza, di centro O e raggio R , ha

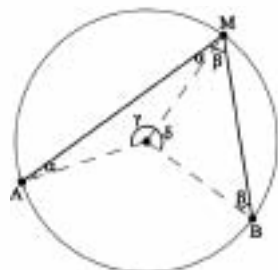


Fig. 2 $\gamma + \delta = 2\pi 2(\alpha + \beta)$

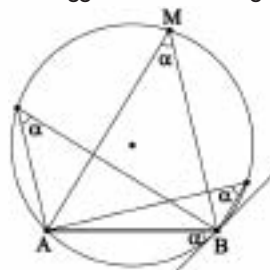


Fig. 3

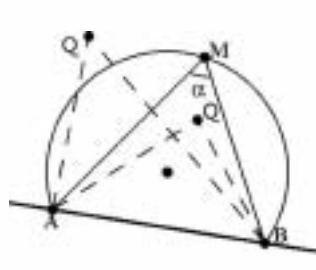


Fig. 4

ampiezza pari a $1/(2R)$ dell'arco da esso sotteso (Fig. 2); da ciò risulta che, in particolare, angoli iscritti in una circonferenza e che sottendono la stessa corda, sono uguali (Fig. 3);

(b) fissato un angolo AMB di ampiezza α , il luogo geometrico dei punti P del piano che vedono la corda AB sotto l'angolo α , cioè tali che l'angolo APB abbia ampiezza α è precisamente l'arco di circonferenza di estremi A e B che passa per M . Inoltre, se un punto Q è interno alla curva formata dall'unione di questo arco congiunto con il segmento AB , l'ampiezza di APB è maggiore di α mentre, se Q è esterno alla stessa curva, l'ampiezza dell'angolo è minore di α (Fig. 4).

Le due immagini seguenti (Fig. 5 e 6) mostrano come questa affermazione sia una facile conseguenza del fatto che, in un triangolo qualsiasi, ogni angolo esterno è la somma dei due angoli interni non adiacenti.

Ma che cosa ha a che fare tutto ciò con il calcio? In questo sport, la determinazione del luogo ideale per segnare un gol fa parte della strategia.

E, anche ignorando i giocatori della squadra avversaria, non è affatto sicuro che un giocatore segni un gol da un punto qualsiasi del campo. È vero che un giocatore che si trova a un metro dal

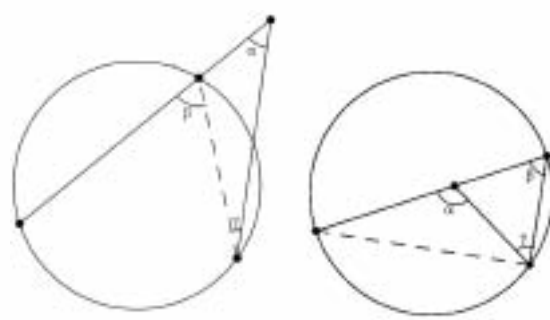


Fig. 5 $\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta$

Fig. 6 $\alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha > \beta$

centro della porta, e senza avversari, dovrebbe proprio riuscire a segnare, ma da quali altri punti si ha una simile certezza?

La risposta dipende dalla mira del giocatore, evidentemente. In *Matematica nel calcio*, l'efficacia della mira di ogni giocatore è rappresentata da un cuneo di plastica (quello bianco in figura 7) la cui apertura è pari al doppio dell'angolo massimo di errore del dato giocatore: migliore è il giocatore, più stretto è il cuneo.



Fig. 7

Per risolvere il problema di determinare la regione in cui il giocatore (senza avversari) è certo di segnare un gol, si colloca il cuneo come indicato nella figura 8 (cioè in modo che lo specchio della porta contenga il cuneo) e si segnano su di un foglio di carta trasparente prece-

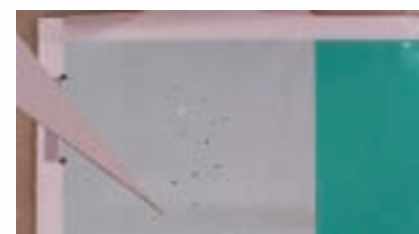


Fig. 8

dentemente fissato sul campo i vertici del cuneo per cui ciò accade.

In realtà, per individuare la regione desiderata, basta segnare i vertici corrispondenti alle posizioni del cuneo per le quali i due lati del cuneo passano per i pali della porta. Questi punti individuano una curva che è il bordo della regione cercata, cioè della regione in cui il giocatore di abilità corrispondente a quel cuneo che miri correttamente, è certo di fare gol. Questa curva (Fig. 9) ha una forma che ricorda quella di un arco di circonferenza (e in realtà è un arco di circonferenza; si può dimostrare che questa è la soluzione del problema...) Consideriamo ora un problema concreto: un giocatore corre lungo una linea parallela alla linea laterale del campo.



Fig. 9

Esiste un punto, su questa linea, dal quale, senza l'intervento di avversari, egli ha la certezza di segnare un gol? La risposta dipende, ancora, dall'efficacia del tiro in porta del giocatore – ossia, dalla larghezza del cuneo che gli è associato – e, naturalmente, anche dalla retta. Se consideriamo l'arco che passa per gli estremi della porta e che ha un angolo inscritto, sotteso dalla corda determinata da questi estremi, di ampiezza uguale a quella del cuneo di questo giocatore, allora:

(1) o non vi è alcun punto in cui il gol sia certo (Fig. 10);

(2) o il gol è garantito³ se il calcio è tirato da un punto del segmento CD della retta (Fig. 11);

(3) oppure la retta è tangente all'arco, e il punto di tangenza è l'unico in cui è assicurata⁴ la marcatura (Fig. 12).

Il giocatore, trovandosi nel punto giusto per tirare in porta, dove deve mirare con la palla se vuole segnare un gol? Dovrà

Ana Cristina Oliveira (amolivei@fc.up.pt)

Laureata in Matematica, collabora con l'associazione portoghese *Atractor - Matemática Interactiva* 1999.

Una versione virtuale dell'esperimento (in portoghese) è disponibile all'indirizzo url <http://www.atorator.pt/ujr/materiais-2005/Futebol.gsp>



Atractor - Matemática Interactiva

Atractor (<http://www.atorator.pt/>) è un'associazione portoghese senza fini di lucro che si occupa di divulgazione della matematica. Tra le molte attività e iniziative che questa associazione ha realizzato, vi sono la mostra *Matemática Viva*, che è ospitata fin dal 2000 nel *Padiglione della Conoscenza* di Lisbona, la versione portoghese (e ampliata) della mostra *Simmetria, giochi di specchi* e l'ideazione del DVD *Simmetria - una presentazione dinamica*, che è già stato distribuito in 16000 copie (di cui 10000 in Italia).

puntare al centro della porta? Gli utenti del modulo sono nuovamente invitati a testare sperimentalmente vari cunei (ovvero vari giocatori) per verificare che, in alcune circostanze (come quelle descritte nella figura 13), per un giocatore posto in P , è possibile fallire il gol tirando la palla verso il punto medio M di AB . Con un po' più di sforzo, ci si convince che, se il giocatore puntasse verso il punto Q di intersezione della bisettrice dell'angolo APB e del segmento AB , allora, senza l'intervento della difesa o del portiere, il gol sarebbe garantito. Da ciò deduciamo che un giocatore deve mirare con la palla verso il centro della porta quando Q coincide con M , cioè, quando il triangolo APB è isoscele, con $|PA|=|PB|$. Supponiamo ora che il giocatore non sia in un punto favorevole al tiro in porta. Dovrà allora avvicinarsi alla regione in cui è garantito il gol, oppure passare la palla a un altro giocatore posto in una posizione migliore. Per la seconda opzione, occorre assicurarsi che la palla entri nella regione di tiro adeguata al compagno di squadra – l'arco di circonferenza che passa per gli estremi della porta e che ha un angolo inscritto sotteso nella porta con ampiezza uguale a quella del cuneo di questo giocatore (Fig. 14, dove X rappresenta il giocatore con la palla).

Considerando le rette tangenti a tale arco che passano per X , concludiamo che il giocatore dovrà mirare al punto medio del segmento CD , se C e D sono i punti di tangenza. In questo modo, occorre puntare nella direzione della bisettrice dell'angolo CXD , una volta che

la corda CD intersechi la curva in angoli uguali (Fig. 15).

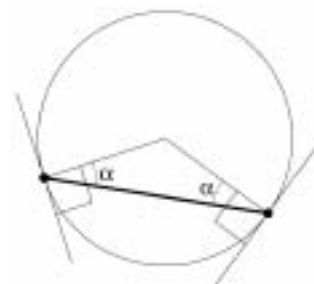


Fig. 15

Infatti, questa è un'altra proprietà che caratterizza la circonferenza: tra tutte le curve piane, semplici e chiuse, essa è l'unica che viene intersecata secondo angoli uguali da qualsiasi corda. La figura 16 evidenzia il fatto che tale risultato è un'immediata conseguenza della proprietà che angoli iscritti in una circonferenza e che sottendono la stessa corda sono uguali, proprietà che solo la circonferenza verifica.

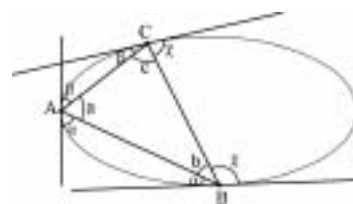


Fig. 16

Note

1. La curvatura misura quanto una curva si differenzia da una linea retta.
2. In questo lavoro, i termini "angolo" e "corda" saranno usati nel senso di "angolo orientato" e "corda orientata".
3. È possibile che la palla tocchi i pali, ma per semplicità, consideriamo questo caso come gol.
4. Come sopra.



Fig. 10



Fig. 11



Fig. 12



Fig. 13

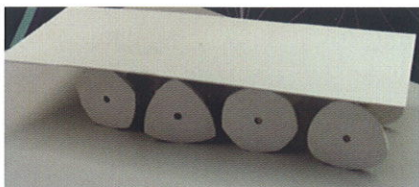


Fig. 14

fuoribordo

Con un giro di ruota

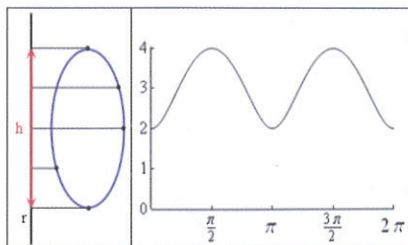
di ANA CRISTINA OLIVEIRA



In un veicolo con quattro ruote circolari, ogni coppia di ruote è collegata tramite un asse che passa per il loro centro. Dal momento che la forma della ruota garantisce che ogni punto del suo bordo sia alla stessa distanza dal suo centro, l'asse si muove senza oscillazioni. Ma, se vogliamo trasportare un oggetto pesante, il sistema di ruote unite da un asse può non essere sufficientemente robusto e quindi spesso si utilizzano rotolamenti: gli oggetti vengono trasportati su di una piattaforma che rotola sopra cilindri di uguale sezione. Anche in questo modo il trasporto si svolge senza oscillazioni, ma questa volta la proprietà responsabile del movimento senza scosse è il fatto che la circonferenza ha *ampiezza costante*.

Che cosa significa *ampiezza costante*? Data una curva piana e chiusa C , l'*ampiezza di C in una direzione fissata r* è la lunghezza del segmento che si ottiene proiettando C su r , perpendicolarmente alla retta stessa. Si dice che l'ampiezza di una curva è *costante* se la lunghezza del segmento è la stessa per tutte le direzioni del piano.

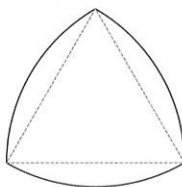
Per esempio, una circonferenza di dia-



A sinistra è rappresentata l'ampiezza h della curva nella direzione r . Il grafico a destra mostra la relazione tra l'inclinazione della retta (la direzione) e l'ampiezza della curva.

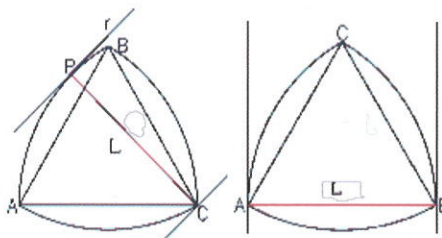
metro d ha ampiezza costante d . Ma questa non è una proprietà che la caratterizza poiché esistono infinite altre curve che la soddisfano. La più sempli-

ce, dopo la circonferenza, è il *triangolo di Reuleaux*, che si ottiene, a partire da un triangolo equilatero di lato L , disegnando tre archi di circonferenza di raggio L e centro nei tre vertici del triangolo. Verifichiamo che la curva così ottenuta ha ampiezza costante L .



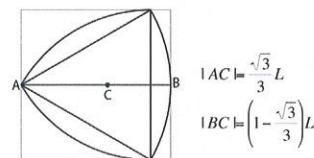
Per farlo abbiamo bisogno di ricordare che cos'è una *retta di supporto* per una curva. Essa è una linea retta che ha almeno un punto di intersezione con la curva e tale che quest'ultima giaccia interamente in uno dei due semipiani individuati dalla retta. Notiamo che una retta di supporto non è, in generale, una retta tangente, così come una retta tangente non è, in generale, una retta di supporto; e che una curva chiusa ha esattamente due rette di supporto in ogni direzione: esse possono essere trovate collocando la curva tra due rette parallele a una direzione fissata e facendole scivolare, mantenendo il parallelismo, fino a toccare la curva.

Torniamo al triangolo di Reuleaux. Consideriamo una direzione e la coppia di rette di supporto del triangolo in questa direzione. Se una di queste rette è tangente a un punto interno a uno degli archi di circonferenza tracciato con centro in un vertice, allora l'altra retta di supporto passa per questo vertice e la distanza tra di esse è il raggio della circonferenza, L . Se entrambe le rette di supporto intersecano la curva nei vertici, allora sono tangenti agli estremi di archi di circonferenza diversi e l'ampiezza della curva nella direzione perpendicolare alle rette di supporto è la lunghezza L del lato del triangolo-



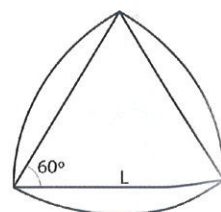
lo equilatero che dà origine al triangolo di Reuleaux.

Se ora consideriamo due direzioni perpendicolari, le rette di supporto in una direzione, sono perpendicolari alle rette di supporto nell'altra: tutte e quattro formano un quadrato dove il triangolo di Reuleaux può essere ruotato senza perdere contatto con il bordo del quadrato. (La stessa affermazione è valida per una qualsiasi curva di ampiezza costante e, viceversa, se questa proprietà è soddisfatta, allora la curva ha ampiezza costante.) Ma, a differenza della circonferenza, durante questo movimento il centro geometrico del triangolo di Reuleaux non si mantiene fisso perché non è a uguale distanza dalle coppie di rette di supporto parallele.



Le curve di ampiezza costante condividono varie proprietà con la circonferenza, come ad esempio:

- tutte le curve di ampiezza costante L sono convesse e hanno uguale perimetro (quello della circonferenza di diametro L , ovvero πL). Per qualche direzione, ognuna delle due rette di supporto le interseca in un solo punto, essendo il segmento che unisce questi due punti di contatto perpendicolare alle rette di supporto
- tra tutte le curve di ampiezza costante che hanno lo stesso perimetro, quella che occupa



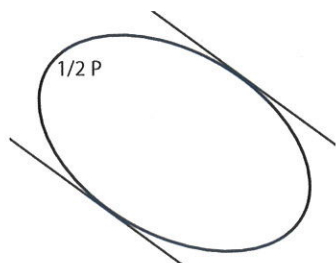
$$\text{Perimetro} = 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) L = \pi L$$



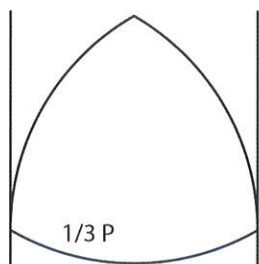
$$\text{Area} = \frac{1}{2} (\pi - \sqrt{3}) L^2$$

l'area maggiore è la circonferenza; quella che delimita l'area minore è il triangolo di Reuleaux.

Del resto, la circonferenza è l'unica curva piana, semplice, chiusa e rettificabile che abbia ampiezza costante e tale che, per ogni punto P della curva, e ogni retta di supporto r per P , il punto della curva che dista metà del perimetro da P stia sulla retta di supporto parallela a r .



In un'ellisse, ogni coppia di rette di supporto divide il perimetro in due parti uguali, ma questa curva non ha ampiezza costante.



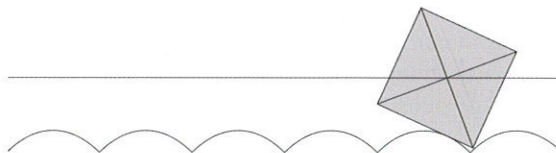
Il triangolo di Reuleaux ha ampiezza costante, ma le due rette di supporto in figura non dividono il perimetro in due parti uguali.

Più in generale, se fissiamo un'applicazione continua f senza punti fissi e tale che $f \circ f = \text{id}$, definita su una curva C piana, semplice e chiusa, e se con $s(C)$ indichiamo il minimo delle distanze (nel piano) da $f(P)$ a P , dove P è un punto qualsiasi della curva C , allora il perimetro della curva è maggiore o uguale a $\pi s(C)$; e vale l'uguaglianza se e solo se C è una curva di ampiezza costante e, per tutti i punti P della curva e una qualsiasi retta di supporto r per P , il punto $f(P)$ appartiene alla retta di supporto parallela a r .

Adesso ci si può chiedere quale sia la forma della strada adeguata a una ruota il cui bordo sia una curva di ampiezza costante data. Durante il movimento occorre che la ruota e la strada si mantengano in contatto, che la lunghezza percorsa dal bordo della ruota sia uguale a quella tracciata sulla strada e, inoltre, che il centro geometrico della ruota si muova orizzontalmente senza oscillazioni. Se per esempio le ruote fossero qua-

Per saperne di più

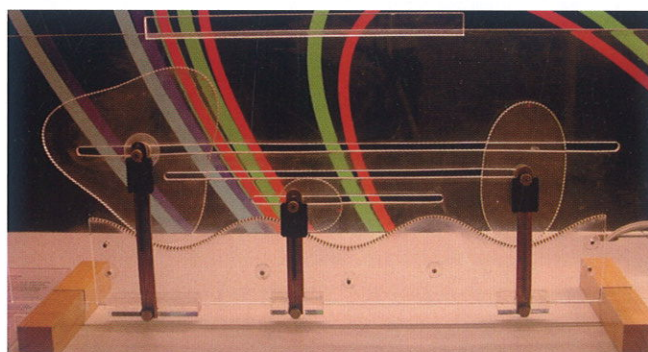
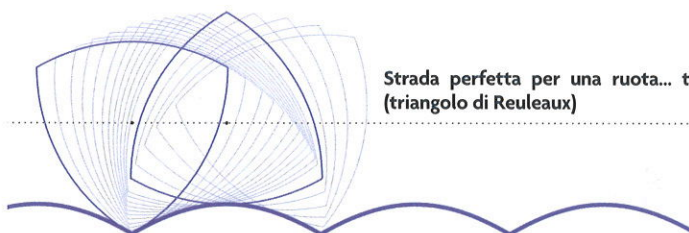
Hall, Wagon – *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, vol. 65, n° 5, 283-301 (1992)
 Rademacher, Toeplitz – *The enjoyment of Mathematics*, Princeton University Press (1970)
 Honsberger – *Ingenuity in Mathematics*, MAA, (1970)
 Niven – *Maxima and minima without calculus*, MAA, Dolciani Mathematical Expositions 6 (1981)
 Bonnesen, Fenchel – *Theory of convex bodies*, BCS Associates (1987)
 Herda – *A characterization of circles and other closed curves*, Amer. Math. Monthly, 143-149 (1974)
 Chakerian – *A characterization of curves of constant width*, Amer. Math. Monthly, 153-155 (1974)



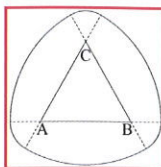
drate come nel disegno qui sopra, come dovrà essere la strada affinché chiunque si muova su un carrello appoggiato su un asse che collega due ruote disposte in fase, abbia un movimento orizzontale (senza oscillare su e giù)? Si può provare che una tale

strada è composta da archi di catenaria invertiti.

Nella mostra *Matematica Viva* vi è anche un *exhibit* in cui ruote di tre forme diverse scorrono su una stessa strada, perfetta per le tre ruote in ogni sua parte.



Ana Cristina Oliveira (amolivei@fc.up.pt)
 Laureata in Matematica, collabora con l'associazione portoghese *Atractor - Matemática Interactiva* dal 1999.



Una costruzione analoga a quella del triangolo permette di disegnare poligoni di Reuleaux con un numero dispari di lati che siano archi di circonferenza. Se invece si vogliono ottenere poligoni con un numero pari di lati, occorre usare archi di raggi diversi.

Nell'immagine vi sono due monete il cui bordo è costituito da curve di ampiezza costante con angoli arrotondati. Per ottenere questo arrotondamento, dopo aver disegnato un triangolo equilatero ABC , di lato L , si prolungano i lati e si tracciano tre archi di circonferenza di raggio r (arbitrario) centrati nei vertici, in modo tale che gli archi siano compresi tra i prolungamenti dei lati del triangolo. In seguito, si tracciano archi di raggio $L+r$ con centro nei vertici in modo tale da unire i piccoli archi prima ottenuti.

1 Introdução

Não sabemos o que se usou primeiro, se a estrada de piso plano ou a roda redonda, mas parece claro que um terreno irregular, com desníveis, seixos e ribeiros de permeio, não é fonte inspiradora para uma tal roda. Contudo, custa-nos a imaginar o mundo sem ela, e este objecto tão útil e bem sucedido talvez tenha sido inventado há mais de trinta séculos, em vários lugares e momentos independentes.

Num veículo com quatro rodas circulares, cada par é ligado por um eixo que passa pelo seu centro. A forma desta roda garante que cada ponto do seu bordo está à mesma distância do centro e, por isso, para alguém sentado no eixo, o movimento faz-se sem oscilações. Essa estrutura, de rodas e eixos acoplados, pode ser substituída por uma plataforma que rola sobre um cilindro, e o que estiver em cima dela também se move, numa estrada plana, tranquilamente. Mas agora a propriedade responsável por essa suavidade é o facto de a circunferência ter largura constante ([1]).

São essas qualidades que, por exemplo, uma elipse ou um quadrado não têm. Se colocarmos um quadrado a rolar no plano, damos conta de que esta curva não serve como formato de roda se queremos que o centro viaje numa linha paralela ao chão – porque a distância do centro do quadrado aos pontos do bordo não é constante – nem como secção de rolamento, se o que se pretende é um movimento sem solavancos, porque o quadrado não tem largura constante (figura 1). Neste cenário, é natural perguntar como deveria ser a estrada para que uma roda quadrada rolasse sobre ela sem balanços incómodos. A estrada adequada, mas com bossas, tem de compensar as diferenças na largura da curva para direcções distintas. O propósito deste texto, inspirado na referência [2], é precisamente o de deduzir a equação diferencial que relaciona uma curva e a estrada onde uma roda, cujo bordo seja essa curva, role com movimento suave, para depois a aplicar a alguns exemplos de rodas, entre eles o triângulo de Reuleaux. Para esta figura, a determinação explícita da expressão matemática que representa a estrada depende do cálculo de um integral elíptico, e não há meios para obter a solução exacta. Indicaremos, contudo, uma solução numérica aproximada e mostraremos imagens de uma animação elaborada com o programa *Mathematica*¹.

O artigo está organizado do seguinte modo: depois de recordarmos alguns aspectos sobre curvas de largura constante, discutiremos a descrição matemática de uma roda a rolar sem deslizamento numa estrada e o que

¹<http://www.wolfram.com/>

se entende por movimento suave; de seguida, analisaremos alguns exemplos; fecharemos o texto com um esquema das instruções que desenham simultaneamente a roda com formato de triângulo de Reuleaux e a estrada que se lhe adequa, e geram a animação de ambas.

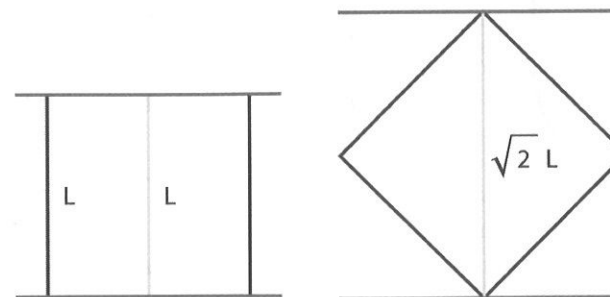


Figura 1: Largura do quadrado em duas direcções.

2 Curvas de largura constante

Definição 1 Dada uma curva plana e fechada² C , a sua largura numa direcção fixada ℓ é o comprimento do segmento de recta que se obtém projectando cada ponto de C , em ℓ , perpendicularmente a ℓ . Diz-se que a largura da curva é constante se esse comprimento for o mesmo para todas as direcções do plano.

A circunferência é o exemplo mais simples de uma curva com largura constante, cujo valor é o seu diâmetro. Mas há uma infinidade de outras curvas com esta propriedade, cuja construção ilustraremos com o triângulo de Reuleaux. Este triângulo de lados bojudos é formado por três arcos de circunferência com o mesmo raio, L digamos, cada um com centro num dos vértices de um triângulo equilátero de lado L (figura 3).

Verifiquemos que esta curva tem largura constante. Designamos por *linha de suporte* de uma curva uma recta que tem intersecção não vazia com a curva e tal que esta está contida num dos semi-planos determinados pela recta (é o caso das linhas assinaladas na figura 1). Sabe-se que cada curva fechada tem exactamente duas linhas de suporte em cada direcção ([6]). Fixemos uma direcção e consideremos o par de linhas de suporte,

²isto é, se viajarmos ao longo da curva a partir de um ponto P , mantendo o sentido do movimento, retornamos a P

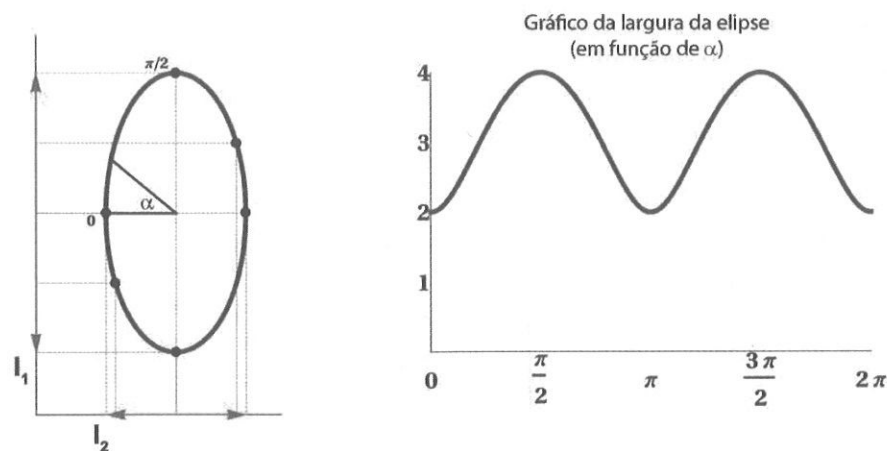


Figura 2: Larguras de uma elipse.

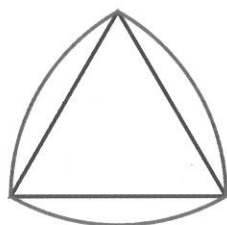


Figura 3: Triângulo de Reuleaux.

ℓ_1 e ℓ_2 , do triângulo de Reuleaux nessa direcção. Se uma destas rectas, digamos ℓ_1 , intersectar o triângulo de Reuleaux num ponto P interior a um dos arcos de circunferência que o constituem, terá de ser tangente à curva em P (imagem à esquerda na figura 4). E, portanto, o segmento que une P ao vértice V do triângulo equilátero que se opõe a esse arco de circunferência é um raio, perpendicular a ℓ_1 e de comprimento L . Além disso a recta que passa pelo vértice V perpendicularmente ao segmento $[PV]$ é precisamente a outra linha de suporte ℓ_2 do triângulo de Reuleaux na direcção fixada e, por conseguinte, a largura da curva nessa direcção é L . Se, pelo contrário, ambas as linhas de suporte intersectam a curva em vértices do triângulo equilátero (imagem à direita na figura 4), então são tangentes a extremos de arcos de circunferência distintos e, por isso, perpendiculares ao segmento que une tais vértices, que é um lado, de comprimento L , do triângulo equilátero que deu origem ao de Reuleaux.

Substituindo o triângulo equilátero por outro polígono regular com um

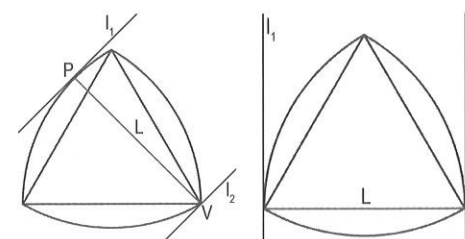


Figura 4: Largura do triângulo de Reuleaux

número ímpar de lados, este método gera um número ilimitado de curvas com largura constante, formadas por arcos de circunferência de igual raio (figura 5). Se usarmos arcos com raios distintos, arranjos de modo que os arcos opostos têm o mesmo centro, obtemos curvas com um número par de arcos de circunferência.³ Na referência [1] podem ler-se mais informações sobre curvas de largura constante.



Figura 5: Moeda inglesa em circulação.

3 A estrada perfeita

Tal como acontece com a roda circular, suporemos que, em cada instante, a estrada tem um só ponto de contacto com a roda. Além disso, queremos que o centro geométrico da roda viaje na horizontal e fique sempre estritamente acima do ponto de contacto da roda com a estrada. E a estrada deve permitir um movimento suave da roda, isto é, o contorno da roda, que rola sem deslizamento, deve encaixar perfeitamente, sem folgas, nas indentações da estrada. Em resumo:

³Mas há curvas de largura constante que não são feitas por arcos de circunferência ([6]).

- (H1) A roda e a estrada mantêm-se em contacto e, em cada instante, o comprimento do arco percorrido no bordo da roda é igual ao descrito sobre a estrada.
- (H2) O centro geométrico da roda desloca-se na horizontal, sem oscilações.

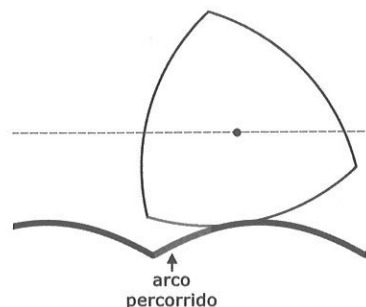


Figura 6: Condição [H1].

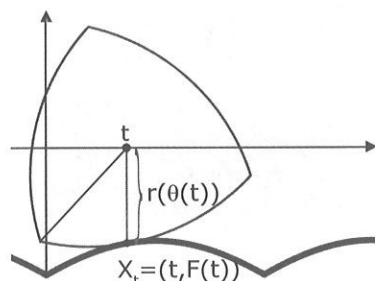


Figura 7: Condição [H2].

Precisamos de traduzir matematicamente estas condições. No movimento, a variável t designa o tempo e C é o bordo da roda. Procuramos uma estrada que seja o gráfico de uma função derivável, digamos F , real e de variável real, tal que $F(t) < 0$ para todo o t . Na descrição que faremos das mudanças de posição de C , é mais útil a sua representação em coordenadas polares relativamente ao centro geométrico da roda. São elas: θ , um ângulo de posição, e r que, para cada θ , regista o valor da distância de P_θ ao centro O da roda (que se está a mover), onde P_θ é o ponto de C tal que, no instante $t = 0$, o vector $\overrightarrow{OP_\theta}$ faz um ângulo θ com o eixo positivo dos t 's, contado em sentido horário (figura 8). Deste modo, o rolamento da roda é descrito

por uma função $t \mapsto \theta(t)$ que mede a variação angular da roda entre $F(0)$ e $F(t)$.

Suponhamos que, no instante inicial $t = 0$, o ponto de contacto da roda com a estrada está imediatamente abaixo de $(0, 0)$ (imagem à esquerda na figura 8). O movimento da roda que aí se inicia pode ser desdobrado em duas componentes: uma translação no eixo dos t 's e uma rotação da roda sobre si mesma, que pode ser descrita por uma função Ω que regista, em radianos, a amplitude desse ângulo de rotação (imagem ao centro da figura 8). Para descrevermos a posição do ponto P_t de C que, no instante t , está em contacto com o ponto da estrada $X_t = (t, F(t))$, usaremos as suas coordenadas polares, $(\theta(t), r(\theta(t)))$, onde $\theta(t) = -\Omega(t) - \pi/2$ (imagem à direita da figura 8). Formulamos a condição inicial e as exigências [H1] e [H2] nesta notação.

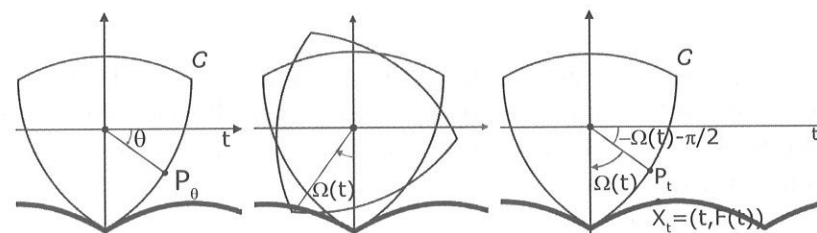


Figura 8

- (H0) No instante $t = 0$, o vector $\overrightarrow{OP_0}$ faz um ângulo com o eixo positivo dos t 's de $-\pi/2$: $\theta(0) = -\pi/2$.
- (H1) Para cada t , o comprimento do arco na curva C entre $\theta(0)$ e $\theta(t)$ é igual à distância percorrida na estrada entre $F(0)$ e $F(t)$.
- (H2) O raio da roda é igual à profundidade da estrada, i.e., para cada t , $F(t) = -r(\theta(t))$.

O requisito [H1] traduz-se pela equação

$$\int_0^t \sqrt{1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\theta(t)} \sqrt{[r(\theta)]^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Derivando ambos os termos em ordem a t e elevando-os de seguida ao quadrado, obtemos

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left[[r(\theta)]^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right].$$

A igualdade de [H2] permite a substituição $\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dF}{dt}$, que simplifica a expressão anterior para

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = [r(\theta)]^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2,$$

de onde resulta que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{r(\theta(t))}.$$

Como θ é uma função crescente (sob a condição inicial [H0]) e r é positiva, concluímos que $\theta'(t) = \frac{1}{r(\theta(t))}$ e, por [H2],

$$F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{1}{\theta'(t)}. \quad (1)$$

Note-se que esta equação, cujo propósito inicial era o de, dada uma roda, se encontrar a estrada que se lhe adequa, permite também resolver o problema dual, o de, para cada estrada, determinar a roda que nela se move suavemente. Exemplifiquemos.

3.1 Roda circular

Neste caso, a função r é constante, igual ao raio R da circunferência, e portanto $F(t) = -r(\theta(t)) = -R$. A boa estrada é, portanto, a plana, gráfico da função $t \geq 0 \mapsto -R$. (figura 9).

3.2 Roda quadrada

A simetria no quadrado permite-nos restringir o estudo a um único lado, como o assinalado na figura 10, com comprimento L . Mudando o sistema de unidades se necessário, podemos admitir que $L = 2$.

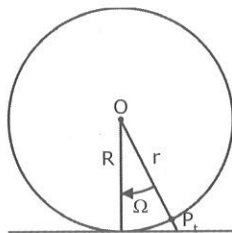


Figura 9: Roda redonda.

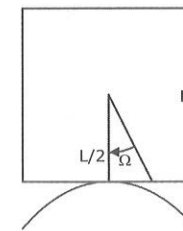


Figura 10: Roda quadrada.

Como, para cada $\Omega \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, se tem

$$\frac{(L/2)}{r(\theta)} = \cos(\Omega),$$

deduzimos que, na variável $\theta = -\Omega - \frac{\pi}{2}$ e no intervalo $\theta \in [-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$,

$$r(\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta - \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin(\theta)}.$$

Além disso, pela relação entre F e θ incluída na igualdade (1), temos

$$\theta'(t) = -\sin(\theta(t)).$$

Esta equação diferencial tem solução explícita dada por

$$\theta(t) = -2 \arctan(\exp(-t + c))$$

em que a constante c é determinada pela condição inicial indicada em [H0]:

$$\theta(0) = -\frac{\pi}{2} = -2 \arctan(\exp(c)),$$

isto é, $c = 0$. Ainda pela fórmula (1), para todo o $t \in [\theta^{-1}(-\frac{3\pi}{4}), \theta^{-1}(-\frac{\pi}{4})]$, temos

$$F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{1}{\sin(2 \arctan(\exp(-t)))}.$$

Atendendo a que $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ e que, no domínio de t que estamos a considerar, $\sin(\arctan(\exp(-t))) < 0$ e $\cos(\arctan(\exp(-t))) > 0$, a expressão anterior reduz-se a:

$$F(t) = -\frac{1}{2 \sin(\arctan(\exp(-t))) \cos(\arctan(\exp(-t)))}$$

$$= -\frac{1 + \exp(-2t)}{2 \exp(-t)} = -\frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = -\cosh(t).$$

Conclusão: A estrada adequada a uma roda quadrangular é periódica, formada por cópias deste arco de catenária que, nas junções, fazem um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, onde cada vértice do quadrado encaixa perfeitamente.

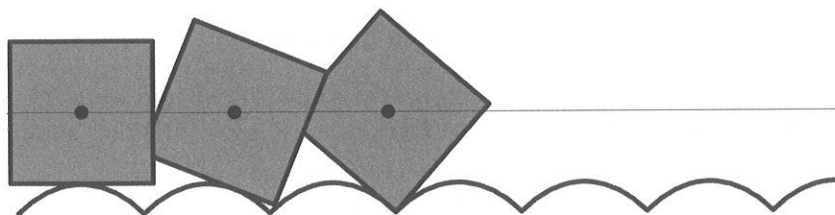


Figura 11: Estrada para rodas quadradas.

O mesmo argumento serve para rodas que são polígonos regulares com qualquer número n de lados. Se da catenária invertida de equação $C(t) = -\cosh(t)$, $t \in \mathbb{R}$, considerarmos apenas o arco com valores de t entre $t_1 = -\sinh^{-1}(\tan(\frac{\pi}{n}))$ e $t_2 = \sinh^{-1}(\tan(\frac{\pi}{n}))$, então o ângulo na junção de cópias deste arco de catenária é $\frac{(n-2)\pi}{n}$, uma vez que a inclinação da tangente à catenária em t_1 é $C'(t_1) = -\tan(\frac{\pi}{n})$. E, portanto, ajusta-se perfeitamente ao ângulo interno do polígono regular de n lados, que é também $\frac{(n-2)\pi}{n}$. Contudo, quando $n = 3$, este ângulo é menor que $\frac{\pi}{2}$ e isso impede que a roda triangular encaixe na cúspide de duas bossas da estrada, uma vez que o bico do triângulo, antes do vértice entrar na junção, colide com a catenária.

3.3 Roda-estrada

A primeira menção que conhecemos, sem demonstração, da existência de uma roda que é a sua própria estrada, remonta a [4]. Em [2], o assunto é retomado, mas de novo apenas referido. Provemos que uma tal roda tem formato parabólico e que é única.

Às condições que descrevem o movimento suave da roda na estrada,

$$\forall t \quad F(t) = -r(\theta(t)) = -\frac{1}{\theta'(t)},$$

precisamos de acrescentar que a roda é idêntica à estrada e que, no movimento, os pontos correspondentes se identificam. Para isso, o gráfico da função $t \mapsto F(t)$ deverá ser a imagem do bordo da roda pela reflexão numa

recta $y = c$, onde $c < 0$ é um parâmetro que verifica $c = F(0)$ e que teremos de determinar. O que corresponde ao sistema de equações:

$$\begin{cases} r(\theta(t)) \cos(\theta(t)) = t \\ r(\theta(t)) \sin(\theta(t)) = -F(t) + 2c \end{cases}$$

Juntando todas as exigências, obtemos

$$\begin{cases} \cos(\theta(t)) = \frac{-t}{F(t)} \\ \sin(\theta(t)) = \frac{F(t) - 2c}{F(t)} \end{cases}$$

Derivando a primeira equação em ordem a t , deduzimos que

$$-\sin(\theta(t)) \theta'(t) = \frac{-F(t) + tF'(t)}{F^2(t)}$$

ou seja, que

$$-\left(\frac{F(t) - 2c}{F(t)}\right) \theta'(t) = \frac{-F(t) + tF'(t)}{F^2(t)}$$

e, portanto, atendendo a (1),

$$-\left(\frac{F(t) - 2c}{F(t)}\right) \left(\frac{-1}{F(t)}\right) = \frac{-F(t) + tF'(t)}{F^2(t)}.$$

Concluimos assim que a função F é solução da equação diferencial

$$tF' - 2F + 2c = 0.$$

Uma solução é $F : t \mapsto -t^2 + c$, para um qualquer $c \in \mathbb{R}$; as outras são da forma $t \mapsto -t^2 + c + \lambda t^2$, onde λ é um parâmetro real.⁴ Como a estrada tem de ficar estritamente abaixo do eixo dos t 's, devemos ter $1 - \lambda > 0$. O que garante que podemos mudar a escala em t e em $F(t)$,

$$(1 - \lambda)F(t) = -[(1 - \lambda)t]^2 + c(1 - \lambda),$$

e concluir que a solução geral corresponde a uma reparametrização da família $(t \mapsto -t^2 + c)_{\{c < 0\}}$. Por isso, bastará analisar de seguida este último conjunto de soluções, que exige o controle de apenas um parâmetro, o valor de c .

⁴De facto, se G e H são soluções desta equação diferencial, então $I = G - H$ satisfaz a igualdade $tI' - 2I = 0$, equação de variáveis separadas equivalente a $\ln(I) = \ln(t^2) + \ln(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; e, portanto, $I(t) = \lambda t^2$.

Voltemos então a (1) para, com a expressão $F(t) = -t^2 + c$, determinarmos θ , r e c . Quanto a θ , a equação a resolver é

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{t^2 - c},$$

sujeita à condição inicial $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$. A solução é

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{-c}}\right) - \frac{\pi}{2},$$

e, portanto,

$$t = \sqrt{-c} \tan\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Assim,

$$r(\theta) = -F(t(\theta)) = t(\theta)^2 - c = -c \tan^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] - c$$

isto é,

$$r(\theta) = -c \sec^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

O sistema de equações que define a roda-estrada obriga agora a que se satisfaça a igualdade $y = -F(x) + 2c$, ou seja, $y = x^2 + c$, o que se traduz por

$$\begin{aligned} \left[-c \sec^2\left(\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos(\theta(t))\right]^2 + c &= \\ &= -c \sec^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \sin(\theta(t)). \end{aligned}$$

Como $c \neq 0$, a expressão anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} c \sec^4\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cos^2(\theta(t)) + 1 &= \\ &= -\sec^2\left[\sqrt{-c}\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right] \sin(\theta(t)). \end{aligned}$$

No instante \mathcal{T} em que $\theta(\mathcal{T}) = 0$, esta expressão reduz-se a

$$c \sec^4\left(\frac{\pi\sqrt{-c}}{2}\right) + 1 = 0,$$

isto é,

$$-c = \cos^4\left(\frac{\pi\sqrt{-c}}{2}\right)$$

ou

$$\cos(\pi\sqrt{-c}) = 2\sqrt{-c} - 1,$$

o que indica que devemos ter $-1 < c < 0$ e informa que $c = -\frac{1}{4}$ é o único valor neste intervalo que serve para descrever uma roda-estrada. A unicidade resulta do facto de as funções $z \mapsto \cos(\pi\sqrt{z})$ e $z \mapsto 2\sqrt{z} - 1$ serem, respectivamente, estritamente decrescente e estritamente crescente no intervalo $]0, 1[$. Em resumo, o bordo da roda é a imagem da estrada $x \mapsto -x^2 - \frac{1}{4}$ por uma reflexão na recta $y = -\frac{1}{4}$, ou seja, é a parábola de equação cartesiana $y = x^2 - \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

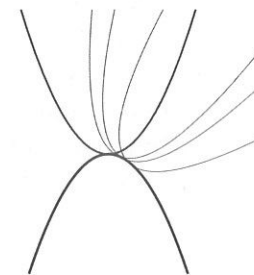


Figura 12: Roda-estrada.

3.4 Roda em triângulo de Reuleaux

Tanto quanto sabemos, na bibliografia sobre este assunto não está feita a dedução da estrada adequada a um triângulo de Reuleaux. É o que trataremos nesta secção.

Como no caso de uma circunferência, ou de qualquer outra curva de largura constante, fixada uma direcção e o par de linhas de suporte correspondente, enquanto rolamos o triângulo de Reuleaux entre as duas linhas paralelas, ele mantém-se tangente a ambas. Mas, ao contrário do que sucede com a circunferência, quando o triângulo de Reuleaux se move nesta faixa, o centro geométrico oscila, não se mantém numa mesma linha horizontal, porque não está a igual distância do par de linhas de suporte paralelas (figura 13). A construção de uma estrada perfeita para esta roda deverá contrabalançar este pequeno defeito. Mas precisamos de descrever primeiro a curva em coordenadas polares.

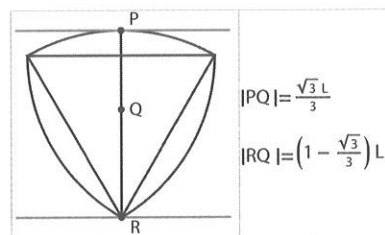


Figura 13: Centro oscilante.

Seja L o comprimento do lado do triângulo equilátero envolvido na construção do triângulo de Reuleaux de largura L , isto é, o raio da circunferência cujos arcos formam esta curva. Designemos por D a distância do centro geométrico do triângulo equilátero a cada um dos seus vértices e posicionemos o triângulo de Reuleaux como na figura 14 para respeitar a condição inicial [H0]. Seja $r(\Omega)$ a distância polar de um ponto do triângulo de Reuleaux com coordenadas polares $(\theta, r(\theta))$, onde, como anteriormente, $\theta = -\Omega - \frac{\pi}{2}$ e $\Omega \in [-\frac{2\pi}{3}, 0]$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo cinzento (na imagem à esquerda da figura 14, se $-\frac{\pi}{3} \leq \Omega \leq 0$; na imagem central da figura 14, se $-\frac{2\pi}{3} \leq \Omega \leq -\frac{\pi}{3}$), temos

$$L^2 = r^2(\Omega) + D^2 - 2r(\Omega)D \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \Omega\right),$$

ou seja,

$$r^2(\Omega) - 2r(\Omega)D \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \Omega\right) + (D^2 - L^2) = 0,$$

igualdade que, na variável $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$, se reescreve

$$r^2(\theta) + 2r(\theta)D \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + (D^2 - L^2) = 0.$$

Resolvendo esta equação de segundo grau em ordem a r , que é não-negativo, concluímos que, para todo o $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$,

$$r(\theta) = -D \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{D^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + (L^2 - D^2)}.$$

Na igualdade acima, L e D não são constantes independentes. Como elucidada a imagem da direita na figura 14, $D^2 + D^2 - 2D^2 \cos(\frac{2\pi}{3}) = L^2$ e, portanto, $D = \frac{L}{\sqrt{3}}$. Para simplificarmos os cálculos, suporemos, mudando o sistema de unidades se necessário, que $D = 1$ e, conseqüentemente, $L = \sqrt{3}$.

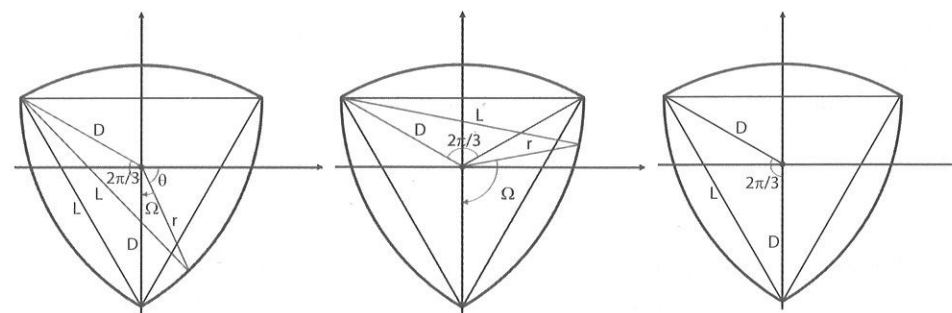


Figura 14: Parametrização do triângulo de Reuleaux

Substituindo estes valores na igualdade anterior, obtemos a equação que descreve um arco do triângulo de Reuleaux em coordenadas polares: para $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$,

$$r(\theta) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2}.$$

De acordo com a fórmula geral (1), para encontrar o caminho ajustado ao triângulo de Reuleaux, bastará agora resolver a equação $-r(\theta(t)) = -\frac{1}{dt}$, isto é,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2}}. \quad (2)$$

Esta é uma equação de variáveis separadas equivalente a

$$d\theta \left[-\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + 2} \right] = dt. \quad (3)$$

Para a resolver, precisamos de primitivar a função $\theta \mapsto -\sin(\frac{2\pi}{3} + \theta) + \sqrt{\sin^2(\frac{2\pi}{3} + \theta) + 2}$. A primeira parcela é de primitivação imediata. Contudo, a segunda é um integral elíptico e, portanto, não se pode calcular em termos elementares, isto é, não se pode exprimir, usando as operações usuais entre funções, como combinação finita de polinômios, frações racionais, funções algébricas, exponenciais, logaritmos ou funções trigonométricas ([3], [5]). Recorremos então à integração numérica, usando o programa *Mathematica*, que forneceu uma solução aproximada:

$$t(\theta) = -\frac{\cos(\theta)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta) + \sqrt{3} \text{EllipticE}\left[\frac{\pi}{6} + \theta, \frac{1}{3}\right] + \gamma,$$

onde EllipticE é o símbolo que, no *Mathematica*, representa os integrais elípticos de segundo tipo e γ é uma constante que fica determinada pela condição inicial $t(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Esta última igualdade é equivalente a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \text{EllipticE} \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{3} \right] + \gamma = 0$$

e o *Mathematica* calculou também um valor aproximado de γ .

Recorde-se, porém, que queremos θ em função de t . Bastaria agora inverter⁵ a função $t(\theta)$, mas o *Mathematica* não o conseguiu fazer. Por isso, lançamos mão de uma amostra numérica: construímos uma lista extensa de pontos da forma $(\theta, t(\theta))$, invertemos-la e interpolamos-la com o comando *Interpolation* que, face a um conjunto finito de pontos do plano, determina um polinômio de grau menor ou igual a 3 cujo gráfico passa por tais pontos.

Com estes dados, foi finalmente possível determinar uma aproximação da função F , cujo gráfico é a estrada adequada ao triângulo de Reuleaux, e fazer uma animação que simulasse o movimento da roda na sua estrada perfeita. É o que mostra a figura 15. A rotina completa⁶ que a desenhou está na figura 16.

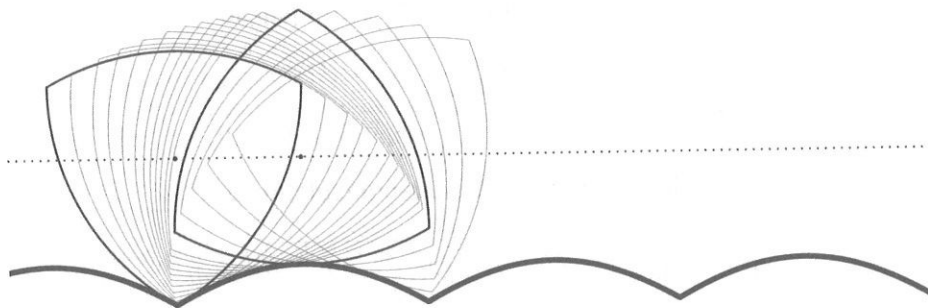


Figura 15: Estrada do triângulo de Reuleaux.

Referências

- [1] Atractor (<http://www.atractor.pt/>), *À volta da roda*, Gazeta de Matemática, nº 162 (2010) 3–5

⁵Note-se que a função $t \mapsto \theta(t)$ tem derivada que não se anula e que é contínua, logo mantém o sinal no intervalo que estamos a considerar.

⁶Esta versão concisa foi obtida na *Associação Atractor* com as sugestões do Professor Manuel Arala Chaves.

- [2] L. Hall, S. Wagon, *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, Vol. 65, nº 5 (1992) 283–301
- [3] T. Kasper, *Integration in finite terms: the Liouville theory*, Mathematics Magazine, Vol. 53, nº 4 (1980) 195–201
- [4] G. B. Robison *Rockers and rollers*, Mathematics Magazine 33(1960) 139–144
- [5] J. Ritt *Integration in finite terms*, New York, 1948
- [6] H. Rademacher, O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics*, Princeton University Press, 1970

```

r[α_] := ((-Sin[α + 2 Pi / 3] + Sqrt[Sin[α + 2 Pi / 3]^2 + 2]) // N) /;
(α >= -Pi / 2 && α <= Pi / 6); Mod2[x_, a_, b_] :=
Module[{k, u}, k = b - a; u = (x - a) / k; Mod[u, 1] * k + a] // N;
r[α_] := r[Mod2[α, -Pi / 2, Pi / 6]] /; (α >= -Pi / 2 && α ≤ 3 Pi / 2);
T[α_] :=
Integrate[-Sin[α + 2 Pi / 3] + Sqrt[Sin[α + 2 Pi / 3]^2 + 2], α] /;
α → α; t[α_] := T[α] - T[-Pi / 2];
n = 48; lis1 = Table[{α // N, t[α] // N}, {α, -Pi / 2, Pi / 6, 2 Pi / (3 n)}];
lis2 = (Reverse[##] &) /@ lis1 // N; θ = Interpolation[lis2];
x1 = N[t[Pi / 6], 15];
F[x_] := -r[θ[x]] /; 0 ≤ x ≤ x1;
F[x_] := F[Mod2[x, 0, x1]] /; x < 0 || x1 < x;
pp[α_, ω_, x_: 0] := {x, 0.} + r[α] {Cos[α + ω], Sin[α + ω]} /; 0 ≤ x ≤ x1;
ppp[ω_, x_: 0, opts_] :=
ParametricPlot[pp[α, ω, x], {α, -Pi / 2, Pi / 6 + 4 Pi / 3}, opts];
ll = {.11, .22, .3, .38, .46, .52, .57, .615, .66,
.71, .75, .96, 1.09, 1.22, 1.38};
gr = Show[Graphics@{Thickness[.0018], Dashing[{0.0017, .007}],
PointSize[.005], Point[{0, 0}], Line[{{-2 / 3 x1, 0}, {3 x1, 0}}]},
ppp[-θ[##] - Pi / 2, ##] & /@ ll, Plot[F[x], {x, -2 / 3 x1, 3 x1},
PlotStyle → Thickness[.006]],
AspectRatio → Automatic, ImageSize → {2400},
Axes → None, PlotRange → {{-2 / 3 x1, 3 x1}, {-1.02, 1.05}}]

```

Figura 16

O que é uma cónica?

Ana Cristina Oliveira

As cónicas são curvas obtidas por intersecção de um cone de revolução com um plano que não passa pelo seu vértice. Se o plano cortar apenas uma das folhas do cone, essa secção do cone é uma *elipse* (de que um caso particular é a circunferência) ou uma *parábola*; se cortar duas, é uma *hipérbole*. Esta é a definição original de Apolónio de Perga (? 262 a.C–190 a.C).

Definições alternativas

Uma caracterização alternativa resulta do seguinte. Quando a intersecção do plano com o cone é uma elipse ou uma hipérbole, existem duas esferas inscritas no cone que são tangentes ao plano, ditas *esferas de Dandelin* (figura 1); se a intersecção for uma parábola, existe uma só tal esfera. Os pontos de tangência das esferas com o plano dizem-se os *focos* da cónica e, no caso da elipse, a soma das distâncias de qualquer ponto da cónica aos dois focos é constante — precisamente igual (como verificaremos) à distância, medida ao longo das geratrizes do cone, entre as circunferências onde as duas esferas tocam o cone.^[1] Se adoptarmos um sistema cartesiano de eixos no plano e, relativamente a ele, a elipse tiver focos $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ e for D a soma das distâncias dos seus pontos aos focos, ela descreve-se pela equação

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = D.$$

Esta equação não é muito prática, mas mostra-se que ela é equivalente a uma outra do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Na hipérbole, por seu turno, o que é constante é o valor absoluto da diferença entre as distâncias de cada um dos seus pontos aos focos. E, em sistemas de eixos apropriados, a hipérbole e a parábola são representadas por equações igualmente simples (mas que revelam um grau adicional de complexidade relativamente às rectas, que correspondem às equações de primeiro grau):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{para a hipérbole} \\ y - px^2 &= 0 && \text{para a parábola.} \end{aligned}$$

Por que há uma equivalência?

Na bibliografia que consultámos, os autores optam frequentemente por utilizar a definição de Apolónio para cónicas e, quando fazem depois uso da descrição métrica indicada, não referem (por) que são modos equivalentes de tratar estas curvas. O objectivo deste artigo é o de apresentar argumentos geométricos que elucidem esta equivalência.

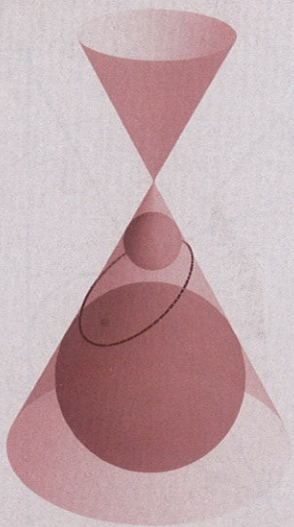


Figura 1

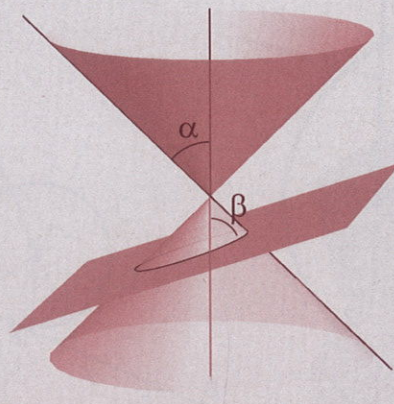


Figura 2

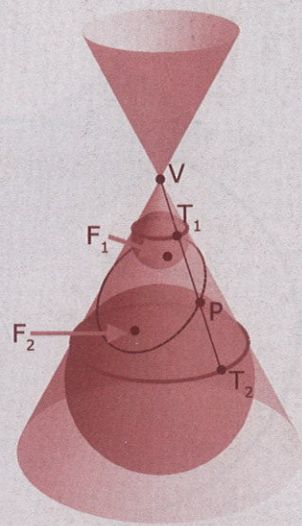


Figura 3

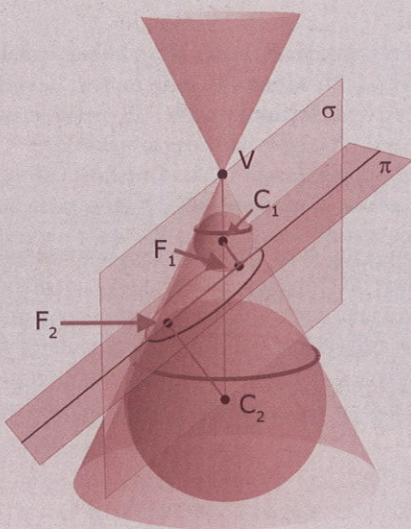


Figura 4

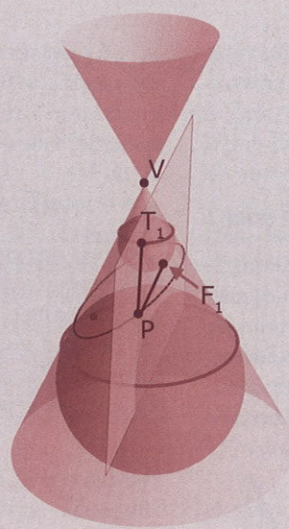


Figura 5

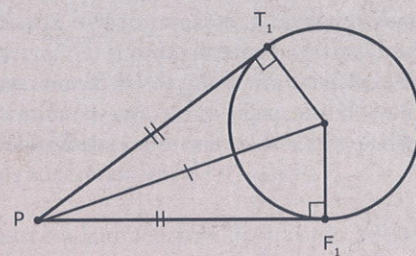


Figura 6

$|PT_1| = |PF_1|$
por congruência
de triângulos.

Analisaremos apenas o caso da elipse (os outros têm dificuldade idêntica) e consideraremos sempre um cone duplo, circular, recto e ilimitado. Uma elipse pode ser vista como:

- (1) A curva resultante da intersecção de um cone de abertura α com um plano π de inclinação β , sendo $\alpha < \beta$ (figura 2).
- (2) O lugar geométrico dos pontos P de um plano π que satisfazem a equação $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = D$, onde F_1 e F_2 são dois pontos desse plano previamente fixados e D é uma constante estritamente maior que $\overline{F_1F_2}$.

Convençamo-nos de que as definições (1) e (2) são equivalentes. Consideremos uma curva que verifica a propriedade (1). De acordo com Dandelin (1794-1847), é possível inscrever no

cone duas esferas tangentes a π ; designemos os pontos de tangência por F_1 e F_2 . Na figura 3, estão assinalados o vértice V do cone, um ponto P da curva e os pontos T_1 e T_2 de intersecção da recta VP com as duas esferas de Dandelin.

Sabemos que $\overline{PT_1} = \overline{PF_1}$ uma vez que o plano definido por P , F_1 e T_1 intersecta uma das esferas de Dandelin numa circunferência que possui como tangentes PF_1 e PT_1 , respectivamente, em F_1 e T_1 (ver figuras 5 e 6). Por simetria, $\overline{PT_2} = \overline{PF_2}$ e, portanto,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2},$$

onde $\overline{T_1T_2}$ é independente do ponto P . Ou seja, os pontos da curva satisfazem a definição (2).

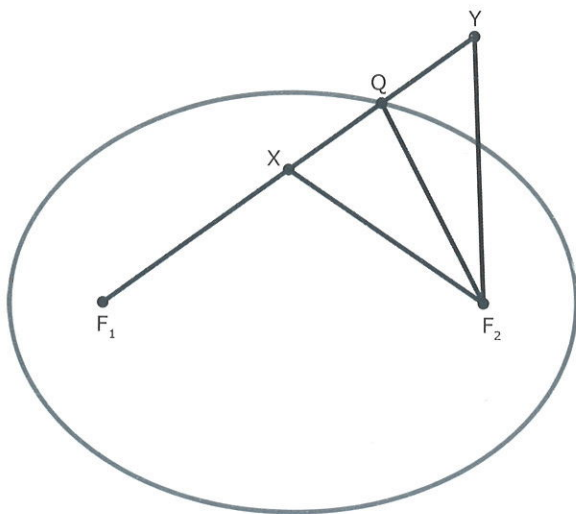


Figura 7

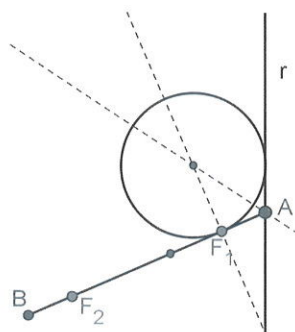


Figura 8

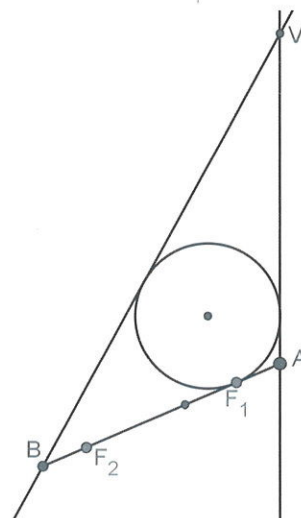


Figura 9

A figura 7 indica por que motivo não existem outros pontos em π que verifiquem a condição (2), embora eles existam no espaço: se X é ponto do plano π interior à elipse, e Q o ponto de intersecção da semi-recta F_1X com a elipse, então $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} < \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = D$. Analogamente, se Y é ponto do plano π exterior à elipse, tem-se $\overline{YF_1} + \overline{YF_2} > \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = D$.

Para esclarecermos por que é que uma curva que satisfaça o enunciado da definição (2) também cumpre o da definição (1), fixemos um plano π , dois pontos F_1 e F_2 nesse plano, uma constante D , estritamente maior que F_1F_2 , e o conjunto de pontos $\mathcal{E} = \{P \in \pi : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = D\}$. Temos agora de encontrar um cone \mathcal{C} adequado, isto é, que permita obter \mathcal{E} como intersecção de π com \mathcal{C} e cujas esferas de Dandelin, de centros

C_1 e C_2 , sejam tangentes a π em F_1 e F_2 . Note-se que, como $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = D$, se um tal cone existir, deverá intersectar a recta F_1F_2 em dois pontos A e B (veja-os na figura 8)^[2] tais que

$$\overline{AF_1} = \overline{BF_2} = \frac{D - \overline{F_1F_2}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AB} > \overline{F_1F_2}.$$

Uma vez que procuramos um cone de revolução, comecemos por diminuir a dificuldade do problema, reduzindo-o a um plano que contenha o vértice e uma geratriz do cone: iremos construir um plano σ contendo AB ($AB = F_1F_2$) e perpendicular a π (figura 4). Por esse motivo, σ contém vários pontos importantes: como devemos ter F_1C_1 e F_2C_2 perpendiculares a π , σ terá

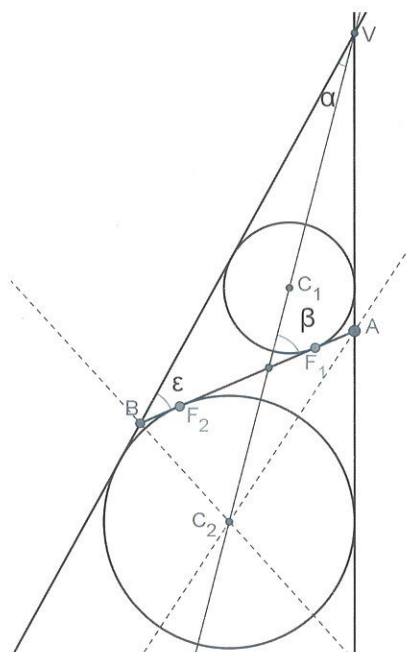


Figura 10

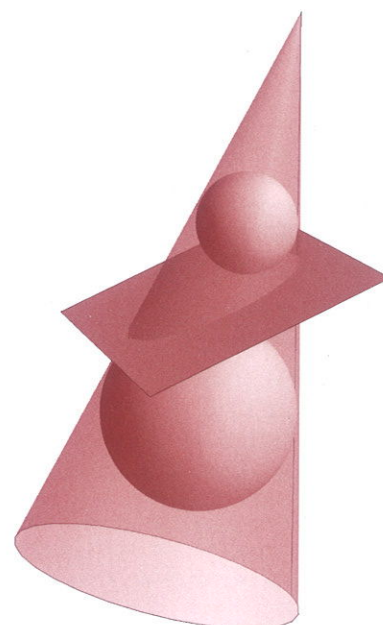


Figura 11

MATERIAIS INTERACTIVOS PARA A DIVULGAÇÃO DA MATEMÁTICA

- MÓDULO INTERACTIVO:
MOVIMENTO E FORMA

(CD anexo)

- INFORMAÇÃO ADICIONAL

(Documento impresso)



1. O que é?
2. Especificidades técnicas
3. Estrutura
4. Ficha técnica

1. O que é?

Neste CD, o utilizador encontra uma introdução interactiva às noções de mecanismo e de espaço de configuração, sendo dado destaque a dois tipos, *quadriláteros articulados* e *pentágonos articulados*, e aos espaços de configuração não degenerados: *curvas* e *superfícies*.¹

2. Especificidades técnicas

O CD inclui um vasto número de animações que, para serem visualizadas, necessitam da instalação prévia do *plug-in CDF player*, que pode ser importado gratuitamente a partir de:

<http://www.wolfram.com/cdf-player>

Uma vez instalado o *plug-in*, poderá aceder à aplicação interactiva abrindo o ficheiro **index.html** com um *browser*.

A aplicação foi testada, com sucesso, nos *browsers* **Internet Explorer 8** e **Mozilla Firefox 18.0.2**, não tendo sido experimentada no sistema Mac.

¹ A autora agradece que lhe sejam comunicados, através do endereço amolivei@fc.up.pt, quaisquer erros detectados assim como comentários ou sugestões de alteração.



3. Estrutura


A aplicação interactiva está dividida em cinco opções: **Mecanismos**, **Quadriláteros articulados**, **Pentágonos articulados**, **Para saber mais** e **Instruções**. Numa fase inicial, é aconselhável aceder ao primeiro tema, **Mecanismos**, bastando para isso clicar na imagem correspondente na página inicial **index.html**.

Para navegar entre páginas sucessivas, clique em:



Através destas setas e dos links adicionais, o utilizador tem acesso a um percurso principal. Para além deste percurso, está à disposição do utilizador informação complementar, em alguns casos de carácter técnico, acessível



através do botão . Tal informação não é necessária ao percurso principal e a decisão sobre a sua leitura é deixada ao critério do utilizador.

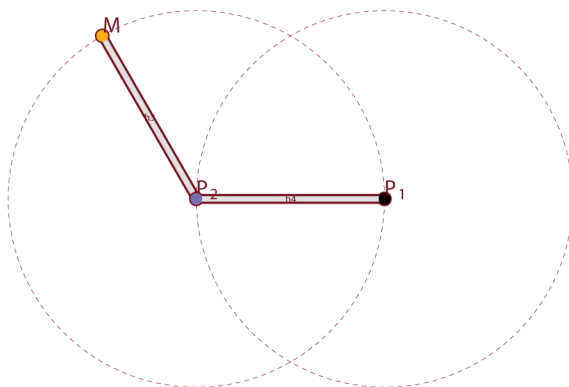
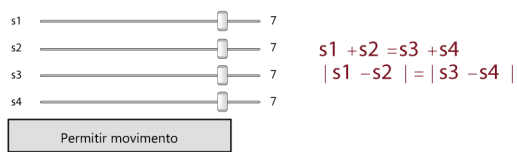
4. Ficha técnica

O conteúdo do CD – texto, animações e imagens - foi produzido pela autora no âmbito do *Programa Doutoral em Ensino e Divulgação das Ciências*, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

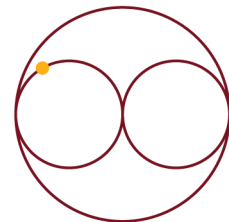
Todas as animações e imagens foram realizadas com recurso aos programas Mathematica (<http://www.wolfram.com>), Photoshop (no tratamento das imagens) e Dreamweaver (na realização das páginas html da apresentação interactiva). Na redacção do texto do documento **Para saber mais** foram usados os programas Lyx e LaTeX.

Movimento e Forma

Ana Cristina Oliveira



Espaço de configuração



Conteúdo

1	Introdução	5
2	Mecanismos no plano	7
2.1	Conceitos	7
2.2	Mecanismos em cadeia	9
3	Espaço de configuração de um mecanismo	12
3.1	Representação dos espaços de configuração	13
4	Propriedades dos espaços de configuração	19
4.1	Mecanismos fixos	19
4.2	Mecanismos com três pontos	22
4.3	Polígonos articulados	22
5	Quadriláteros articulados	26
5.1	Codificação	27
5.2	Curvas	29
6	Pentágonos articulados	37
6.1	Exemplo	38
6.2	Modelo	47
6.3	Espaços de configuração degenerados	55
6.4	Genus e simetria	59
6.4.1	Exemplo	59
6.5	Genus menor ou igual a 4	63
7	Genus superior a 4	67
7.1	Pentágonos articulados aumentados	68
7.2	Construção	70
8	Comentários	78
9	Programação	79
10	Bibliografia	91

1 Introdução

A intenção deste texto começou por ser a de guiar o utilizador do módulo virtual *Movimento e Forma*, fornecendo uma lista sucinta de instruções, informações e sugestões úteis à aprendizagem interactiva que o CD pretende induzir. Quando o número de páginas atingiu a meia centena, o livro de bolso deu lugar a um manual de apoio científico, com demonstrações dos resultados mais relevantes que se desejaria que o utilizador do módulo descobrisse caso optasse pelo percurso do CD com mais desafios. O texto final complementa, e não apenas acompanha, o CD que é, por natureza, poupado em palavras.

A leitura deste compêndio na íntegra permitirá, a quem já tenha estudado superfícies e o respectivo Teorema de Classificação, que conheça outro modo de construir esses espaços e de definir alguns dos invariantes topológicos que lhes estão associados. Cada superfície compacta, conexa, sem bordo e orientável surge aqui como o espaço de configuração de um sistema de hastes articuladas, e as noções de genus e de componente conexa são expressas numa linguagem simples mas rigorosa. Depois, um tal leitor poderá deduzir alguma propriedade válida em certas superfícies (como o Teorema da Esfera Cabeluda), enunciada em termos de mecanismos, ou estender esta abordagem dinâmica a variedades de dimensão superior.

Para quem não conheça o conceito de superfície, ou quem nunca se tenha questionado sobre quantos tipos topológicos de superfícies há, o que é essencial no conteúdo do módulo interactivo, e portanto deste texto, é a noção de espaço de configuração de um mecanismo e o modo como é possível transferir informação topológica de um conjunto de pontos e hastes, que se movem num plano com a métrica euclidiana, para um espaço abstracto de posições admissíveis do sistema articulado, cuja representação conduz a modelos tão regulares como uma esfera ou um toro. Um primeiro contacto com este capítulo da Topologia, que se pretende elucidativo e convincente, beneficia de uma abordagem interactiva, que incita à descoberta e sugere caminhos distintos a utilizadores com formação diversa, apelando essencialmente ao uso de relações de ordem entre comprimentos de hastes. Neste contexto, o texto serve também para sistematizar o que se vai aprendendo, sugerindo aos leitores retornos oportunos ao módulo virtual e permitindo um estudo aprofundado de respostas, que não exigem matemática avançada, a questões que o módulo vai colocando.

2 Mecanismos no plano

Um sistema articulado é uma cadeia finita de hastes rígidas, com algumas junções fixas e outras móveis, que funciona movendo as juntas sob constrangimento. Encontramo-los, por exemplo, nos braços de um *robot* industrial, nas alavancas, na engrenagem das rodas de um comboio, nas suspensões das bicicletas, nas sanfonas das portas dos antigos elevadores, nos alicates de pressão, nos pantógrafos, nas cadeiras de balanço. São frequentemente a alma de engenhos simples mas capazes de tarefas complicadas. O objectivo deste texto é o de formular matematicamente uma versão deste conceito no plano, que designaremos por *mecanismo*, e estudar o conjunto de todas as suas posições, a que chamaremos *espaço de configuração*. Começaremos por analisar um tipo simples de mecanismo, os *quadriláteros* e os *pentágonos articulados*, para mais tarde se entender o efeito de lhes acrescentarmos pontos e hastes.

2.1 Conceitos

Definição 2.1. Chamamos *conjunto de peças* a um terno $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ constituído por:

- Um conjunto finito de pontos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{fixos}} \cup \mathcal{V}_{\text{móveis}}$, com $\mathcal{V}_{\text{fixos}} = \{V_1, \dots, V_m\}$ pontos fixos e $\mathcal{V}_{\text{móveis}} = \{V_{m+1}, \dots, V_n\}$ pontos móveis, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $n > m$.
- Um conjunto finito \mathcal{A} de hastes tal que quaisquer dois pontos distintos de \mathcal{V} estão ligados por um subconjunto de \mathcal{A} . Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$, denotaremos a haste que une os pontos V_i e V_j , se existe, por $\widehat{V_i V_j}$.
- Uma função $d : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$.

Dados um ponto fixo $V \in \mathcal{V}$ e uma haste $H = \widehat{V_i V_j} \in \mathcal{A}$, diremos que H e V estão ligados se $V \in H$. Dadas duas hastes $H_1 = \widehat{V_i V_j}$ e $H_2 = \widehat{V_k V_\ell}$, diremos que estão unidas se $H_1 \cap H_2 = V_s$ para algum $s \in \{i, j, k, \ell\}$.

Definição 2.2. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um conjunto de peças. Diz-se que \mathcal{M} é *realizável* se existir uma função $F : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que, para todos os pares de pontos $V_i, V_j \in \mathcal{V}$, se tem

$$\|F(V_i) - F(V_j)\| = d(\widehat{V_i V_j})$$

onde $\| \cdot \|$ designa a distância euclidiana em \mathbb{R}^2 . A imagem de F , $\{F(v) : v \in \mathcal{V}\}$, diz-se uma **realização** de \mathcal{M} .

Uma realização permite visualizar o conjunto de peças no plano como pontos unidos por segmentos de recta, que representam as hastes. Isso nem sempre é possível, como mostra o conjunto de peças em cadeia, com três pontos e cujas hastes medem, respectivamente, 11, 5 e 3, da Figura 1.



Figura 1: Conjunto de peças não realizável.

Definição 2.3. Um **mecanismo** é um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ realizável.

Por coerência de linguagem, dados um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ e uma sua realização $\{F(v) : v \in \mathcal{V}\}$, chamaremos também aos elementos de $F(\mathcal{V}_{\text{fixos}})$ e de $F(\mathcal{V}_{\text{móveis}})$, respectivamente, pontos fixos e pontos móveis, e haste a cada elemento de $\{\overbrace{F(V_i)F(V_j)} : \widehat{V_i V_j} \in \mathcal{A}\}$. Por definição, o comprimento de cada haste $\overbrace{F(V_i)F(V_j)}$ é precisamente $d(\widehat{V_i V_j})$. Como é irrelevante o lugar no plano onde estes pontos e hastes se situam, os pontos fixos poupam-nos a necessidade de ter em conta todas as versões isométricas (equivalentes) de um conjunto de peças; por isso, no que se segue, o conjunto $\mathcal{V}_{\text{fixos}}$ será sempre não-vazio.

Exemplo 1. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$, com $\mathcal{V}_{\text{fixos}} = \{V_1, V_2\}$, $\mathcal{V}_{\text{móveis}} = \{V_3\}$, $\mathcal{A} = \{\widehat{V_1 V_2}, \widehat{V_2 V_3}, \widehat{V_3 V_1}\}$ e $d : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$ tal que $d(a) = \sqrt{3}$ para todo o $a \in \mathcal{A}$. Então a função $F : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(V_1) = (1, 0), F(V_2) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right), F(V_3) = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

é uma realização de \mathcal{M} . Está representada na Figura 2.

Definição 2.4. Dizemos que um conjunto de peças $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ com $n > 2$ pontos é uma **cadeia de peças** se as suas hastes tiverem um arranjo cíclico:

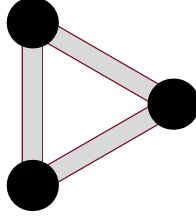


Figura 2: Realização do Exemplo 1.

- $\mathcal{V}_{fixos} = \{V_1, V_2\}$.
- $\mathcal{V}_{móveis} = \{V_3, \dots, V_n\}$.
- $\mathcal{A} = \{\widehat{V_1V_2}, \widehat{V_2V_3}, \dots, \widehat{V_{n-1}V_n}, \widehat{V_nV_1}\}$.

Neste contexto, a referência aos índices será feita *módulo* n .

2.2 Mecanismos em cadeia

Numa cadeia de peças com n pontos, representaremos por ℓ_1, \dots, ℓ_n os comprimentos das hastes $\widehat{V_1V_2}, \widehat{V_2V_3}, \dots, \widehat{V_nV_1}$. Se uma cadeia de peças é realizável, diremos que é um **mecanismo em cadeia**: pode ser visto como uma linha poligonal articulada com dois pontos fixos adjacentes. Em que circunstâncias é uma cadeia de peças um mecanismo?

Proposição 2.1. *Seja \mathcal{M} uma cadeia de peças com n pontos. Então \mathcal{M} é um mecanismo se e só se*

$$\ell_i \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Demonstração. Suponhamos que \mathcal{M} é um mecanismo e seja $(F(V_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ uma sua realização. Os elementos desta realização são vértices de uma linha poligonal fechada com comprimentos ℓ_1, \dots, ℓ_n . Por esse motivo, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$\ell_i \leq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k.$$

Reciprocamente, sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Uma vez que $\ell_1 \leq \sum_{k=2}^n \ell_k$ e $\sum_{k=1}^{n-1} \ell_k \geq \ell_n$, concluímos que existe $1 \leq j \leq n-2$ tal que

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \leq \sum_{k=j+1}^n \ell_k$$

e

$$\sum_{k=1}^{j+1} \ell_k \geq \sum_{k=j+2}^n \ell_k.$$

Sejam $S_1 = \sum_{k=1}^j \ell_k$ e $S_2 = \sum_{k=j+2}^n \ell_k$. A condição anterior é, pois, equivalente a

$$S_1 \leq S_2 + \ell_{j+1}$$

e

$$S_1 + \ell_{j+1} \geq S_2.$$

Se $S_1 = S_2 + \ell_{j+1}$, consideremos P_3, P_4, \dots, P_{j+1} na semi-recta (que designamos por $\dot{P}_1 P_2$) com origem em P_1 e que passa em P_2 tais que:

$$\begin{aligned} \|P_2 - P_3\| &= \ell_2 \\ \|P_3 - P_4\| &= \ell_3 \\ &\vdots \\ P_3 &\notin \dot{P}_2 P_1 \\ P_4 &\notin \dot{P}_3 P_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

como ilustra a Figura 3. Analogamente, consideremos $P_{j+2}, P_{j+3}, \dots, P_n$ em $\dot{P}_1 P_2$ tais que

$$\begin{aligned} \|P_{j+1} - P_{j+2}\| &= \ell_{j+1} \\ \|P_{j+2} - P_{j+3}\| &= \ell_{j+2} \\ &\vdots \\ P_{j+2} &\in \dot{P}_{j+1} P_1 \\ P_{j+3} &\in \dot{P}_{j+2} P_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Deste modo, a função

$$\begin{aligned} F: \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ V_i &\rightarrow P_i \end{aligned}$$

é uma realização de \mathcal{M} . Analogamente se conclui que, se $S_1 + \ell_{j+1} = S_2$, e também quando $\ell_{j+1} = S_1 + S_2$, então \mathcal{M} é um mecanismo, pelo que falta apenas estudar o caso em que

$$S_1 < S_2 + \ell_{j+1}, \quad S_1 + \ell_{j+1} > S_2 \quad \text{e} \quad \ell_{j+1} < S_1 + S_2.$$

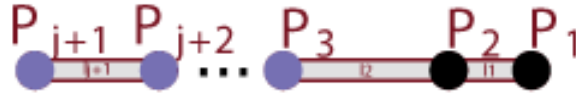


Figura 3: Realização de \mathcal{M} .

Neste cenário, S_1 , ℓ_{j+1} e S_2 são comprimentos dos lados de um triângulo. Tomemos P_{j+1} como sendo o ponto de P_1P_2 tal que $\|P_1 - P_{j+1}\| = S_1$, e P_{j+2} como um dos (dois) pontos do plano tais que $\|P_{j+2} - P_{j+1}\| = \ell_{j+1}$ e $\|P_{j+2} - P_1\| = S_2$. De seguida, consideremos pontos P_3, P_4, \dots, P_j do segmento (que designamos por $[P_1P_{j+1}]$) que une os pontos P_1 e P_{j+1} , incluindo os extremos, tais que

$$\begin{aligned} \|P_2 - P_3\| &= \ell_2 \\ \|P_3 - P_4\| &= \ell_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tomemos ainda $P_{j+3}, P_{j+4}, \dots, P_n$ em $[P_{j+2}P_1]$ tais que

$$\begin{aligned} \|P_{j+2} - P_{j+3}\| &= \ell_{j+2} \\ \|P_{j+3} - P_{j+4}\| &= \ell_{j+3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

como mostra a Figura 4.

□

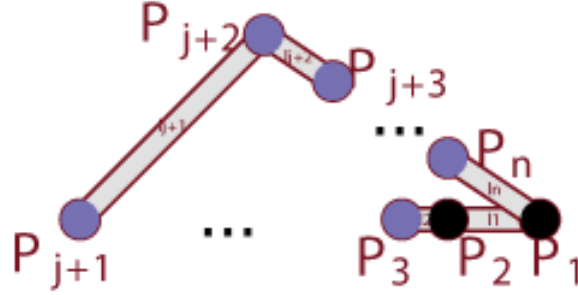


Figura 4: Condição suficiente para um conjunto de peças ser um mecanismo.

3 Espaço de configuração de um mecanismo

Dado um mecanismo \mathcal{M} , e seguindo a noção intuitiva exemplarmente explicada em [11], estamos interessados na união de todas as posições dos sistemas articulados reais que satisfazem as condições associadas a \mathcal{M} , isto é, estão ligados a m pontos fixos previamente escolhidos, possuem $n - m$ junções entre as suas hastes, etc. Na verdade, procuramos estabelecer um homeomorfismo¹ entre este conjunto de posições (com uma dada topologia) e um subconjunto de \mathbb{R}^d , para um natural d suficientemente elevado.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um mecanismo tal que V_1, \dots, V_m são pontos fixos e V_{m+1}, \dots, V_n são pontos móveis. Consideremos m pontos P_1, \dots, P_m do plano tais que $\|P_i - P_j\| = d(\widehat{V_i V_j})$, para todo o $\widehat{V_i V_j} \in \mathcal{A}$, sendo V_i, V_j pontos fixos. O **espaço de configuração** de \mathcal{M} , que designaremos por $[\mathcal{M}]_{(P_1, \dots, P_m)}$ ou, mais abreviadamente, $[\mathcal{M}]$, é o conjunto, com a métrica induzida da métrica Euclideana em $(\mathbb{R}^2)^{n-m}$,*

$$\bigcup_F \{ (F(V_{m+1}), \dots, F(V_n)) \in (\mathbb{R}^2)^{n-m} \}$$

onde F designa uma qualquer realização de \mathcal{M} tal que $F(V_i) = P_i$ para todo o $i \in \{1, \dots, m\}$.

Note-se que a todo o m -uplo de pontos em \mathbb{R}^2 , digamos P_1, \dots, P_m , tal que $\|P_i - P_j\| = d(\widehat{V_i V_j})$ para todo o $\widehat{V_i V_j} \in \mathcal{A}$ com $V_i, V_j \in \mathcal{V}_{\text{fixos}}$, está associado um espaço de configuração diferente de \mathcal{M} . Contudo, até à Secção 7,

¹Um homeomorfismo entre dois espaços topológicos é uma bijecção contínua com inversa contínua.

interessar-nos-ão apenas espaços de configuração de mecanismos com dois pontos fixos e, neste caso, como veremos (Proposição 5.2), todos os espaços de configuração são homeomorfos. Por isso, até à Secção 7, falaremos em geral do (único) espaço de configuração de \mathcal{M} .

3.1 Representação dos espaços de configuração

Consideremos, a título de exemplo, um mecanismo M com um ponto fixo, V_1 , dois pontos móveis, V_2 e V_3 , e hastes $\widehat{V_1V_2}$ e $\widehat{V_2V_3}$, como se indica na Figura 5.

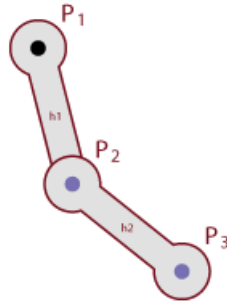


Figura 5: Uma realização do mecanismo M

O seu espaço de configuração é o conjunto de pares de pontos do plano (P_2, P_3) , tais que P_2 e P_3 são pontos móveis de uma qualquer realização do mecanismo. Nesse conjunto, consideremos a topologia induzida² da métrica euclidiana de \mathbb{R}^4 . Tais pontos ficam completamente determinados por dois ângulos (veja-se a Figura 6):

- o ângulo $\alpha \in [-\pi, \pi]$ que $\overrightarrow{P_1P_2}$ faz com a vertical;
- o ângulo $\mu \in [-\pi, \pi]$ entre $\overrightarrow{P_2P_3}$ e a vertical.

Como α e μ são independentes e tomam valores no intervalo $[-\pi, \pi]$, o par (μ, α) pertence ao quadrado da Figura 7:

²Mais informações em S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley, 1970

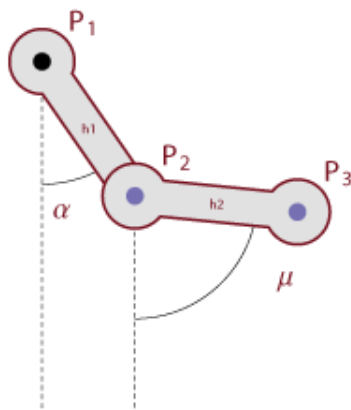


Figura 6: Ângulos α e μ .

Será este quadrado um bom modelo para o espaço de configuração? Note-se que não há diferença, a nível do movimento do mecanismo e dos pontos que gera no espaço de configuração, no facto de α medir $-\pi$ ou π ; e a mesma situação ocorre com μ . Por esse motivo, para obtermos um modelo adequado, precisamos de identificar, para qualquer $\mu \in]-\pi, \pi[$, os dois pontos $(\mu, -\pi)$ e (μ, π) e, analogamente, para qualquer $\alpha \in]-\pi, \pi[$, de entender como idênticos os dois pontos $(-\pi, \alpha)$ e (π, α) (como indica a Figura 8). Finalmente, temos ainda de identificar os quatro pontos $(-\pi, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$, $(\pi, -\pi)$ e (π, π) . O quadrado com estas identificações é o da Figura 9.

Na Figura 10 construímos uma imagem em \mathbb{R}^3 do quadrado com estas identificações: o modelo é (topologicamente) equivalente a um toro.

Neste toro, cada ponto representa uma e uma só posição do mecanismo. Contudo, há outra característica que pretendemos exigir do modelo: que a topologia que nele consideremos traduza correctamente a noção de proximidade entre pontos do espaço de configuração do mecanismo M . Como são as vizinhanças de cada ponto (μ, α) no toro? Cada vizinhança tem de conter uma bola centrada em (μ, α) . Se $\alpha \neq -\pi$, $\mu \neq -\pi$ e o raio da bola é suficientemente pequeno, trata-se de uma bola usual no interior do quadrado. Se $\alpha = -\pi$ ou $\mu = -\pi$, estando os bordos do quadrado identificados dois a dois, tais bolas deverão ter uma forma semelhante à que se vê na Figura 11.

A descrição anterior das vizinhanças sugere que, no modelo, devemos adoptar a topologia quociente, que é a maior família de abertos no toro que

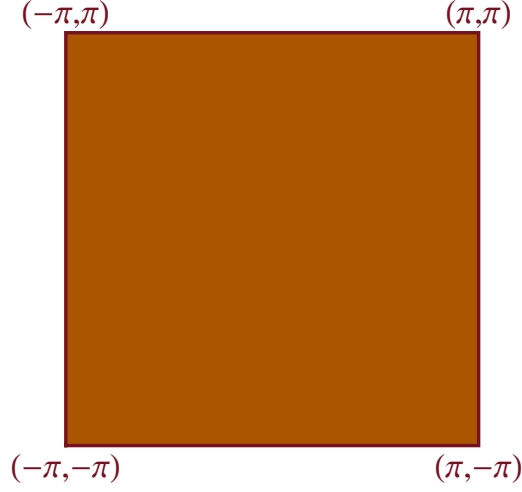


Figura 7: Domínio de (μ, α) .

torna contínua a projecção do quadrado no espaço quociente. Vejamos que ela é a topologia adequada para que o modelo represente devidamente o espaço de configuração do mecanismo.

Consideremos uma realização $R_0 = (P_2, P_3)$ do mecanismo e o correspondente par de ângulos (μ, α) , como na Figura 12. Fixemos de seguida duas bolas abertas, \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 , centradas em P_2 e P_3 respectivamente (Figura 13).

O conjunto formado pelas realizações (Q_2, Q_3) de M tais que Q_2 e Q_3 estão contidos, respectivamente, em \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 , formam uma vizinhança \mathfrak{W} de R_0 (Figura 14). E, reciprocamente, qualquer vizinhança de R_0 contém uma vizinhança deste tipo.

Além disso, é possível encontrar uma vizinhança suficientemente pequena de (μ, α) tal que todos os elementos desta vizinhança correspondem a realizações de M contidas em \mathfrak{W} (Figura 15).

Reciprocamente, fixados um par (μ, α) do quadrado com identificações, uma sua vizinhança U e a respectiva realização R_0 do mecanismo M , existe uma vizinhança \mathfrak{U} de R_0 tal que toda a realização R em \mathfrak{U} corresponde a um par (α_R, μ_R) de U . Esta equivalência entre as vizinhanças de cada ponto do espaço de configuração e as da sua representação no toro convince-nos de que estamos perante o modelo apropriado.

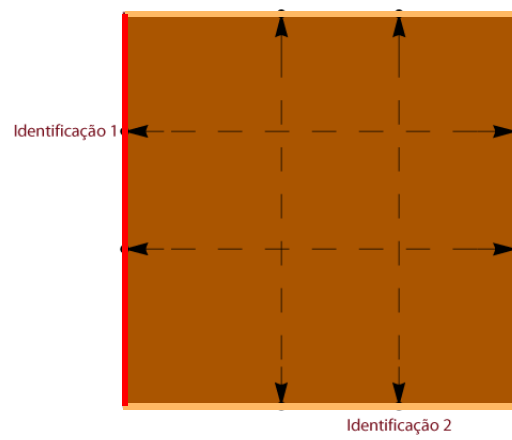


Figura 8: Pontos identificados no quadrado.

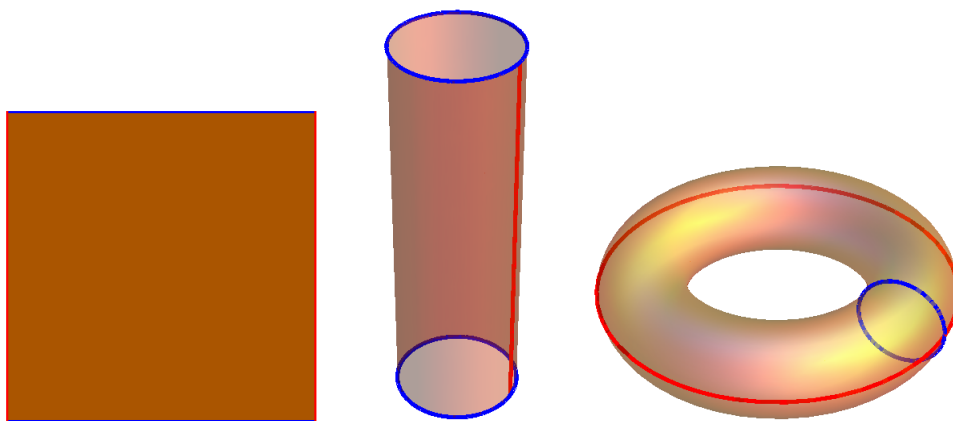


Figura 9: Quadrado com identificações.

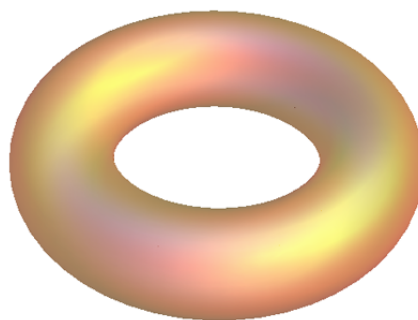


Figura 10: Espaço quociente do quadrado pelas identificações.

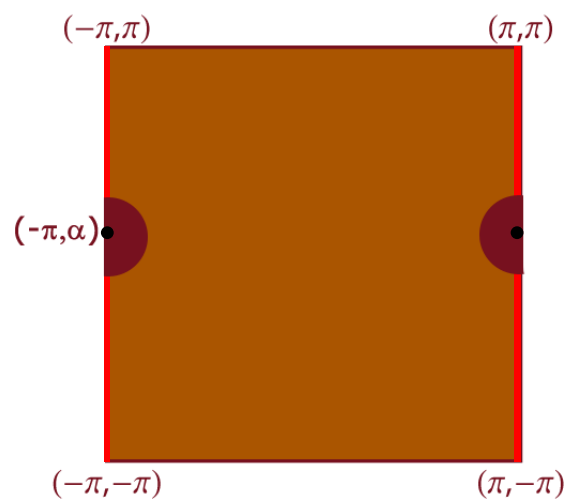


Figura 11: Bola centrada em $(-\pi, \alpha)$.

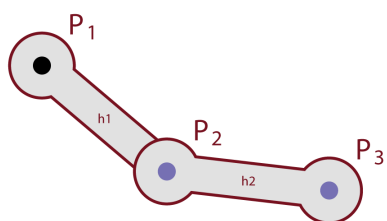


Figura 12: R_0

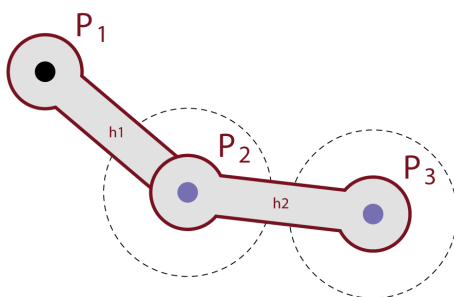


Figura 13: \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 .

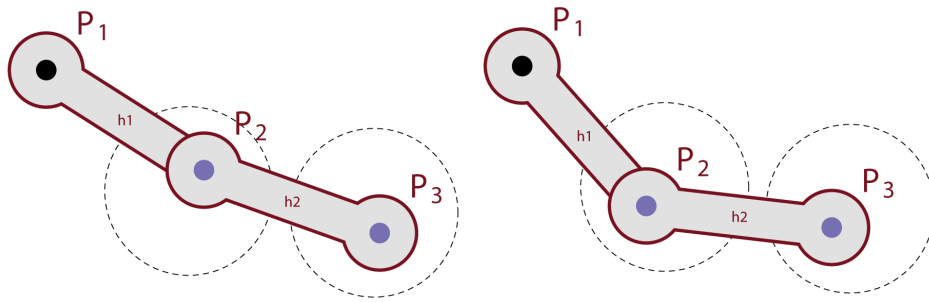


Figura 14: Vizinhança de R_0 .

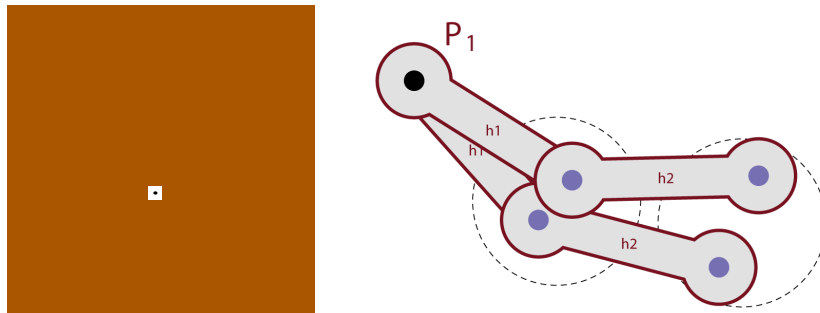


Figura 15: A branco, uma vizinhança de (μ, α) no quadrado cuja imagem está contida em \mathfrak{W} .

4 Propriedades dos espaços de configuração

Trata-se agora de reunir informação sobre o que podem ser os espaços de configuração dos mecanismos.

4.1 Mecanismos fixos

Em que circunstâncias o espaço de configuração de um mecanismo se reduz a um ponto?

Proposição 4.1. *O espaço de configuração de um mecanismo em cadeia \mathcal{M} com n pontos ($n > 2$) contém apenas um ponto se e só se existir $1 \leq i \leq n$ tal que $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$.*

Demonstração. Se $\ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$, então há apenas uma realização possível do mecanismo e, portanto, o espaço de configuração é constituído por um ponto. Quanto à implicação recíproca, sejam P_1 e P_2 pontos do plano tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Suponhamos, por absurdo, que $\ell_i \neq \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$. Então existe $1 < j \leq n - 2$ tal que

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \leq \sum_{k=j+1}^n \ell_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{j+1} \ell_k > \sum_{k=j+2}^n \ell_k.$$

Note-se, contudo, que, se se verificar a desigualdade estrita na primeira destas condições,

$$\sum_{k=1}^j \ell_k < \sum_{k=j+1}^n \ell_k,$$

então, como $\ell_{j+1} \neq \sum_{k=1, k \neq j+1}^n \ell_k$, os comprimentos

$$\sum_{k=1}^j \ell_k \quad \ell_{j+1} \quad \text{e} \quad \sum_{k=j+2}^n \ell_k$$

são lados de um triângulo, o que implica que o espaço de configuração possui, pelo menos, dois pontos distintos, correspondentes às realizações da Figura 16. Isto contradiz a hipótese de o espaço de configuração estar restrito a um ponto.

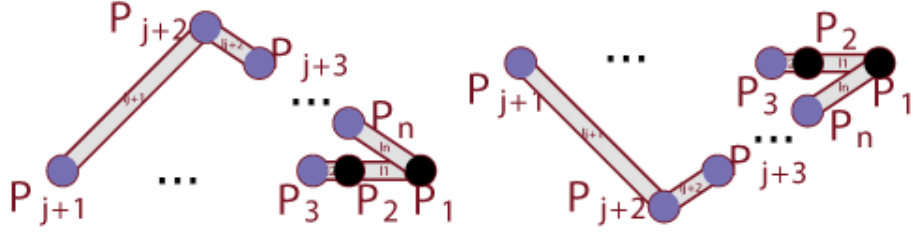


Figura 16: Duas realizações de um mecanismo.

Conclusão: devemos ter

$$\sum_{k=1}^j \ell_k = \sum_{k=j+1}^n \ell_k.$$

Defina-se

$$N^* = \max \left\{ \left| \ell_{j+1} - \sum_{k=j+2}^n \ell_k \right|, \left| \ell_{j+2} - \sum_{k=j+1, k \neq j+2}^n \ell_k \right|, \dots, \left| \ell_n - \sum_{k=j+1}^{n-1} \ell_k \right| \right\}$$

e consideremos λ tal que

$$\max \left\{ \left| \sum_{k=1}^{j-1} \ell_k - \ell_j \right|, N^* \right\} < \lambda < \sum_{k=1}^j \ell_k.$$

Por escolha de λ , os comprimentos $\sum_{k=1}^{j-1} \ell_k$, ℓ_j e λ são lados de um triângulo. Podemos, pois, considerar $P_j \in \dot{P}_1 P_2$ e P_{j+1}, Q_{j+1} pontos tais que

$$\begin{aligned} \|P_1 - P_j\| &= \sum_{k=1}^{j-1} \ell_k \\ P_{j+1} &\neq Q_{j+1} \\ \|P_j - P_{j+1}\| &= \|P_j - Q_{j+1}\| = \ell_j \\ \|P_{j+1} - P_1\| &= \|Q_{j+1} - P_1\| = \lambda \end{aligned}$$

Tomemos ainda P_3, P_4, \dots, P_{j-1} em $[P_1 P_j]$ tais que

$$\begin{aligned} \|P_2 - P_3\| &= \ell_2 \\ \|P_3 - P_4\| &= \ell_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

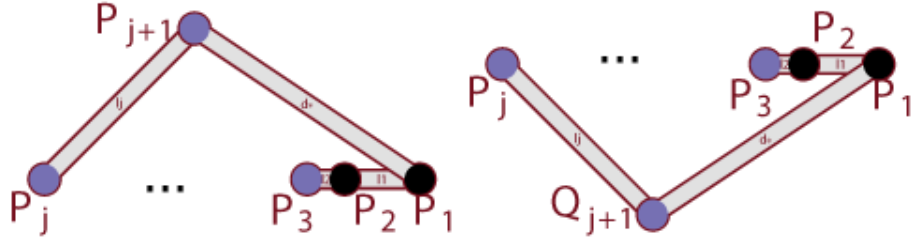


Figura 17: Duas realizações de \mathcal{M}' .

Consideremos agora a cadeia de peças \mathcal{M}' com $n - j$ hastes que se obtém de \mathcal{M} retirando os pontos V_2, V_3, \dots, V_j e as hastes a eles associadas, passando o ponto móvel V_{j+1} a fixo e acrescentando-se uma nova haste $\widehat{V_1 V_{j+1}}$ de comprimento λ . Uma vez que $\lambda > N^*$ e que $\lambda < \sum_{k=j+1}^n \ell_k$, este conjunto de peças é também um mecanismo. E, portanto, encontrámos duas realizações para \mathcal{M}' :

$$R_1 = \{P_{j+1}, P_{j+2}, \dots, P_n, P_1\}$$

e

$$R_2 = \{Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_n, P_1\}.$$

Deste modo, exibimos dois elementos distintos do espaço de configuração do mecanismo inicial, nomeadamente

$$\{P_3, \dots, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}, \dots, P_n\}$$

e

$$\{P_3, \dots, P_j, Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_n\},$$

o que contradiz o facto de o espaço de configuração conter apenas um ponto. Logo devemos ter

$$\left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n \ell_k \right\} \neq \emptyset.$$

□

No que se segue, consideraremos apenas mecanismos cujo espaço de configuração não se restringe a um ponto.

4.2 Mecanismos com três pontos

A Proposição seguinte informa que, para obtermos espaços de configuração interessantes, devemos trabalhar com mecanismos com mais do que três pontos.

Proposição 4.2. *O espaço de configuração de um mecanismo em cadeia em que o cardinal de \mathcal{V} é 3 reduz-se a dois pontos.*

Demonstração. Com efeito, $\ell_i < \sum_{k=1, k \neq i}^3 \ell_k$, para todo o $i \in \{1, 2, 3\}$ e, portanto, ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 são lados de um triângulo. Dados dois pontos, P_1 e P_2 , de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$, existem duas, e apenas duas, escolhas para um ponto P_3 que pertença ao espaço de configuração: é o terceiro ponto de um dos dois triângulos com lados ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e tendo P_1 e P_2 como vértices. \square

4.3 Polígonos articulados

Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ um mecanismo em cadeia com $n > 3$ pontos. Se $n = 4$, diremos que \mathcal{M} é um **quadrilátero articulado**; se $n = 5$, \mathcal{M} é um **pentágono articulado**.

Para determinarmos o espaço de configuração de um polígono articulado, precisamos de identificar o contributo de cada componente móvel, enquanto controlamos a posição relativa de todas as outras partes, fixas e móveis, do mecanismo. Se uma haste com base um ponto fixo Q fosse, de resto, inteiramente livre, traçaria no plano uma circunferência centrada em Q e de raio igual ao comprimento da haste. A ligação a outras hastes condiciona este movimento e, portanto, restringe o que afinal contém o espaço de configuração. É essa análise do movimento conjunto que descreveremos de seguida.

Definição 4.1. *Consideremos um mecanismo em cadeia $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ com $n > 3$ pontos e $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Denotemos por:*

- C_α , o ponto da circunferência de centro P_2 e raio ℓ_2 tal que $\overrightarrow{P_2 C_\alpha}$ faz um ângulo orientado $\alpha \in [0, 2\pi]$ com $\overrightarrow{P_2 P_1}$.
- $d_{\mathcal{M}}$, a função
$$\begin{array}{ll} d_{\mathcal{M}} : [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \alpha & \rightarrow \|P_1 - C_\alpha\|. \end{array}$$

- $$\{\alpha \in [0, 2\pi] : \exists \text{ realiza\c{c}\~ao } F : C_\alpha \equiv F(V_3), F(V_1) \equiv P_1, F(V_2) \equiv P_2\}.$$

- Selecionemos no mecanismo \mathcal{M} uma componente com menos peças, cujo conjunto de posições analisaremos depois, de modo a encontrarmos um sistema natural de coordenadas para os pontos do espaço de configuração de \mathcal{M} .

Diagram illustrating the realization of a metric M_α . The path is shown as a red line segment connecting points P_1 and P_2 , passing through a point C_α . A dashed circle centered at P_2 shows a point $C_{\alpha'}$ on its boundary. The distance $d_M(\alpha)$ is indicated between C_α and P_1 . The path is labeled "Realização de M_α ".

A função $d_{\mathcal{M}}$ é uma medida de quão amplo pode ser o movimento conjunto das peças do mecanismo, e satisfaz as seguintes propriedades.

23

1. $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = d_{\mathcal{M}}(2\pi - \alpha)$ para todo o $\alpha \in [0, 2\pi]$.
2. $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é estritamente crescente e contínua.
3. $d_{\mathcal{M}}$ tem um mínimo global em 0, com valor igual a $|\ell_1 - \ell_2|$, e um máximo global, atingido em π de valor $\ell_1 + \ell_2$.
4. $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq \sum_{k=3}^n \ell_k \text{ e } d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq \max \left\{ [\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

5. Sejam $\alpha_1, \alpha_0 \in]0, \pi[$ tais que $\alpha_1 < \alpha_0$. Então:

- α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ se e só se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \sum_{k=3}^n \ell_k$
- α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = \max \left\{ [\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

6. $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é um intervalo fechado.
7. $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$, onde $\alpha_0, \alpha_1 \in [0, \pi]$ são tais que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 \leq \pi$.

Demonstração.

1. A verificação da igualdade é um exercício elementar. Resulta do facto de as posições do mecanismo serem simétricas relativamente à recta P_1P_2 .
2. Consideremos um referencial no plano para o qual $P_2 = (0, 0)$ e $P_1 = (\ell_1, 0)$. Então

$$C_{\alpha} = \ell_2 (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

e

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \sqrt{(\ell_2)^2 + (\ell_1)^2 - 2 \ell_2 \ell_1 \cos(\alpha)}.$$

A função $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é, pois, contínua e estritamente crescente.

3. Das álneas anteriores concluímos que $d_{\mathcal{M}}$ tem um mínimo global em 0 e um máximo global em π . Além disso, por construção, $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_1 - \ell_2|$ e $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_1 + \ell_2$.
4. Designemos por X_1 a soma $\sum_{k=3}^n \ell_k$ e por X_2 o valor do

$$\max \left\{ [\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k] : 3 \leq i \leq n \right\}.$$

Pela Proposição 2.1, dado $\alpha \in [0, 2\pi]$, então $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ se e só se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq X_1 \text{ e } d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq [\ell_i - \sum_{k=3, k \neq i}^n \ell_k], \forall 3 \leq i \leq n$$

ou, equivalentemente,

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) \leq X_1 \text{ e } d_{\mathcal{M}}(\alpha) \geq X_2.$$

5. Como \mathcal{M} é um mecanismo, sabemos que existe pelo menos um $\alpha \in [0, \pi]$ que satisfaz a condição da álnea anterior. Se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$, então, como $d_{\mathcal{M}|_{[0, \pi]}}$ é estritamente crescente, para $\alpha_0 < \beta \leq \pi$ tem-se $d_{\mathcal{M}}(\beta) > X_1$ e um tal β não é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Temos ainda $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \geq X_2$. E, portanto, não só α_0 é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ como é o seu máximo. Analogamente se prova que, se $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = X_2$, então α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$.

Reciprocamente, se $0 < \alpha_0 < \pi$ é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, então $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1$ e, para todo $\alpha_0 < \alpha \leq \pi$, tem-se $\alpha \notin \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e, portanto,

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) > X_1.$$

Por outro lado, como $d_{\mathcal{M}}$ é estritamente crescente, para todo o $\alpha < \alpha_0$, tem-se

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) < d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1.$$

Assim, pela continuidade de $d_{\mathcal{M}}$, temos

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1.$$

Analogamente se prova que, se α_1 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, então $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = X_2$.

6. Pela alínea anterior, se existir $\alpha_0 < \pi$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = X_1$, então α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Se não existir um tal α_0 , então é porque $d_{\mathcal{M}}(\alpha) < X_1$, para todo o $\alpha \in [0, \pi[$ e, nesse caso, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é $\alpha_0 = \pi$. Do mesmo modo se conclui sobre a existência do mínimo α_1 de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Acresce que todo o $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ satisfaz a condição

$$X_2 \leq d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) < d_{\mathcal{M}}(\alpha) < d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) \leq X_1$$

pelo que α é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$.

7. Resulta da primeira e da penúltima alíneas.

□

5 Quadriláteros articulados

Consideremos um quadrilátero articulado \mathcal{M} . Sejam P_1 e P_2 dois pontos de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Então o espaço de configuração de \mathcal{M} é

$$[\mathcal{M}] = \{(P_3, P_4) \in (\mathbb{R}^2)^2 : \|P_2 - P_3\| = \ell_2, \|P_3 - P_4\| = \ell_3, \|P_4 - P_1\| = \ell_4\}.$$

Além disso, por construção, $P_3 = C_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Sejam $\alpha_0, \alpha_1 \in [0, \pi]$ tais que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$. Em geral, a qualquer $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_0$ podemos fazer corresponder dois pontos do espaço de configuração, nomeadamente (C_α, P_4) e (C_α, P'_4) , onde P_4 e P'_4 são os pontos que resultam da intersecção das circunferências de centros C_α e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 (Figura 19).

Em que circunstâncias é que os dois pontos indicados coincidem? Tal acontece se $\overrightarrow{P_4 C_\alpha}$ e $\overrightarrow{P_4 P_1}$ estiverem alinhados, isto é, se as circunferências da Figura 19 são tangentes. Isso significa que

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 \quad \text{ou} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) = |\ell_3 - \ell_4|.$$

E quando é que alguma das condições anteriores ocorre? Sabemos, pela Proposição 4.3, que, se $\ell_1 \neq \ell_2$, então

$$\exists \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} : d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 \Leftrightarrow \ell_1 + \ell_2 = \max(d_{\mathcal{M}}) \geq \ell_3 + \ell_4$$

e que

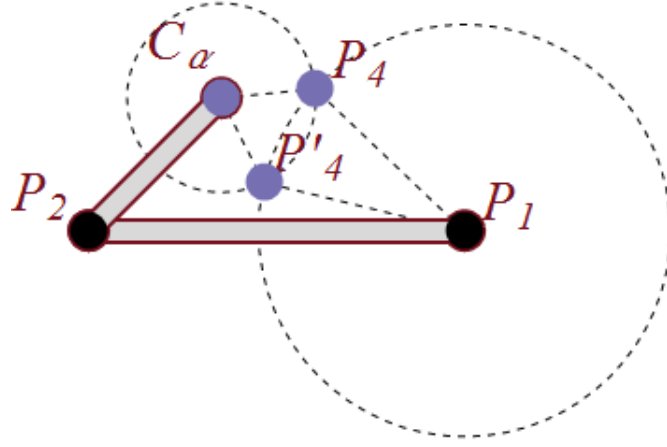


Figura 19: Dois pontos do espaço de configuração.

$$\exists \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} : d_{\mathcal{M}}(\alpha) = |\ell_3 - \ell_4| \Leftrightarrow |\ell_1 - \ell_2| = \min(d_{\mathcal{M}}) \leq |\ell_3 - \ell_4|.$$

Interessa-nos, pois, analisar as relações de grandeza existentes entre $\ell_1 + \ell_2$ e $\ell_3 + \ell_4$ e entre $|\ell_1 - \ell_2|$ e $|\ell_3 - \ell_4|$.

5.1 Codificação

Prossigamos com uma análise dos espaços de configuração possíveis para um mecanismo \mathcal{M} . Suponhamos que $\ell_1 \neq \ell_2$. Pela Proposição 4.3, $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$, para alguns $0 \leq \alpha_1 < \alpha_0 \leq \pi$. Além disso, se P_4 e P'_4 designam os pontos de intersecção das circunferências de centros C_α e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 , então o espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ é a união $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ com uma noção adequada de proximidade, onde \mathcal{M}_1 é o conjunto

$$\left\{ (C_\alpha, P_4) : \alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \text{ e a concavidade entre } \overrightarrow{P_4 C_\alpha} \text{ e } \overrightarrow{P_4 P_1} \text{ é nula ou positiva} \right\}$$

e \mathcal{M}_2 é o conjunto

$$\left\{ (C_\alpha, P'_4) : \alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \text{ e a concavidade entre } \overrightarrow{P'_4 C_\alpha} \text{ e } \overrightarrow{P'_4 P_1} \text{ é nula ou negativa} \right\}.$$

A Proposição seguinte informa que podemos considerar \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 como sub-conjuntos de \mathbb{R}^2 .

Demonstração. No que se segue, $\| \cdot \|$ designa a métrica euclideana em \mathbb{R}^2 ou em \mathbb{R}^4 . Seja \mathcal{P} a bijecção

Por ser uma projecção, \mathcal{P} é contínua. Além disso, a sua inversa também é contínua. Fixemos $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e um real positivo ϵ . Consideremos $\alpha' \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e sejam Q_4 e Q'_4 os pontos de intersecção das circunferências de centros $C_{\alpha'}$ e P_1 e raios, respectivamente, ℓ_3 e ℓ_4 . Se $x = \|P_1 - C_{\alpha}\|$ e $y = \|P_1 - C_{\alpha'}\|$, então (Figura 20)

e

e, pertanto,

$$x^2 - y^2 = 2 \ell_1 \ell_2 [\cos(\alpha') - \cos(\alpha)] .$$



Daqui resulta que podemos escolher $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, se $|\alpha' - \alpha| < \delta$, então $|x - y|$ e $\|P_4 - Q_4\|$ são suficientemente pequenos e, conseqüentemente, $\|(C_\alpha, P_4) - (C_{\alpha'}, Q_4)\| < \epsilon$. \square

5.2 Curvas

Nesta secção, identificaremos o espaço de configuração de um quadrilátero articulado, com $\ell_1 \neq \ell_2$, a partir das relações $>$, $=$ ou $<$ entre

$$\ell_1 + \ell_2 \quad \text{e} \quad \ell_3 + \ell_4$$

e entre

$$|\ell_1 - \ell_2| \quad \text{e} \quad |\ell_3 - \ell_4|.$$

Usaremos a expressão abreviada $(>, >)$ para designar as desigualdades

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 &> \ell_3 + \ell_4 \\ |\ell_1 - \ell_2| &> |\ell_3 - \ell_4| \end{aligned}$$

e expressões análogas para as outras oito possibilidades de pares de símbolos do alfabeto $\{<, =, >\}$.

$(>, >)$

Como vimos, existe $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ tal que $d_\mathcal{M}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Sendo

$$|\ell_1 - \ell_2| > |\ell_3 - \ell_4|,$$

não existe α_1 em $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ tal que $d_\mathcal{M}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. E, portanto, α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ e 0 é o mínimo. Além disso, como $\mathcal{D}_\mathcal{M} = [0, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi]$, podemos supor que $\mathcal{D}_\mathcal{M} = [-\alpha_0, \alpha_0]$ e, desse modo, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a arcos de circunferência.

Note-se ainda que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam em dois pontos, nomeadamente (C_{α_0}, P) e $(C_{-\alpha_0}, Q)$, que, pela Proposição 5.1, podemos considerar como estando em \mathbb{R}^2 ; correspondem às extremidades dos referidos arcos de circunferência. Ou seja, o espaço de configuração do mecanismo é constituído por dois arcos de circunferência que se intersectam apenas nas extremidades. Do ponto de vista topológico (isto é, a menos de um homeomorfismo), $[\mathcal{M}]$ é uma **circunferência** (Figura 21).

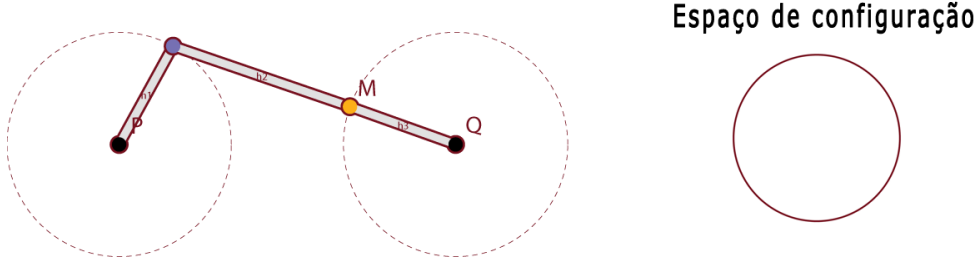


Figura 21: Espaço de configuração se $(>, >)$.

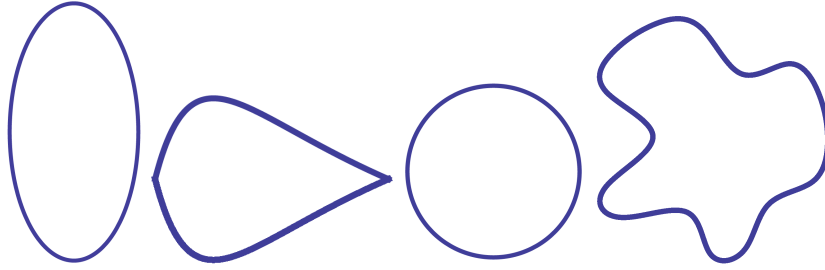


Figura 22: Circunferências topológicas.

Estas são circunferências topológicas; poderiam, pois, ter outras formas, como as da Figura 22.

$(>, =)$

Seja $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Sendo

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|,$$

temos $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Tal como anteriormente, podemos considerar que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$ e que

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{(C_{\alpha_0}, P), (C_{-\alpha_0}, Q), (C_0, R)\}$$

para três pontos P, Q, R distintos do plano. Novamente, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a arcos de circunferência que se intersectam nas extremidades, mas como há um terceiro ponto, naturalmente do interior dos arcos, que está

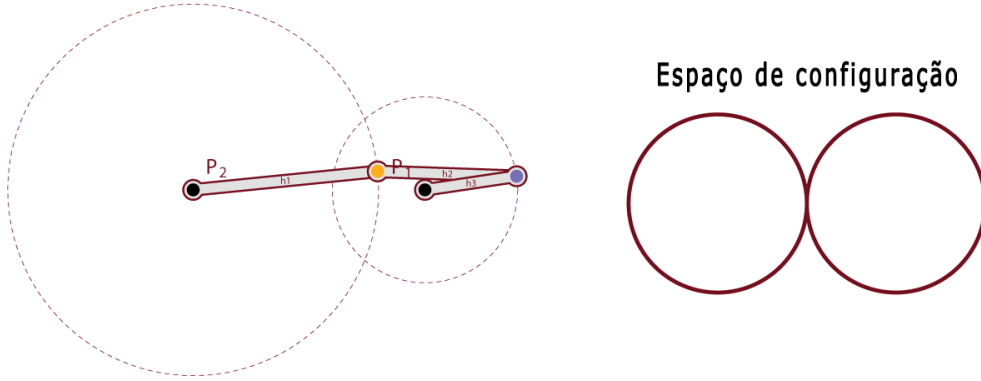


Figura 23: Espaço de configuração se $(>, =)$.

na intersecção destas componentes do espaço de configuração, forma-se uma figura topologicamente semelhante a um **oito** (Figura 23).

$(>, <)$

Seja $\alpha_0 \neq \pi$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4$. Como

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|,$$

existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. E, portanto, α_0 é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e α_1 é o mínimo. Note-se agora que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$ é constituído por dois intervalos disjuntos. Por esse motivo, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a dois arcos de circunferência. A sua intersecção resume-se a quatro pontos, (C_{α_0}, P) , (C_{α_1}, Q) , $(C_{2\pi - \alpha_0}, R)$ e $(C_{2\pi - \alpha_1}, S)$, correspondendo os dois primeiros pontos às extremidades de um dos arcos (em \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2) e os outros às extremidades do outro arco. Assim, o espaço de configuração é constituído por **duas circunferências disjuntas** (Figura 24).

$(=, >)$

Sabemos que $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_3 + \ell_4$ e que não existe α_1 em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Sendo $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, as

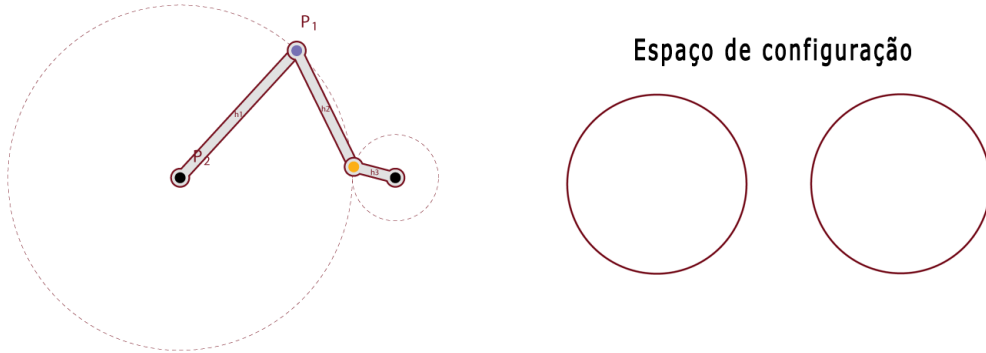


Figura 24: Espaço de configuração se $(>, <)$.

componentes \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambas homeomorfas a circunferências. Note-se ainda que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam num único ponto (C_π, P) , para algum $P \in \mathbb{R}^2$. Por essa razão, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências que se intersectam num ponto, ou seja, um **oito** (Figura 25).

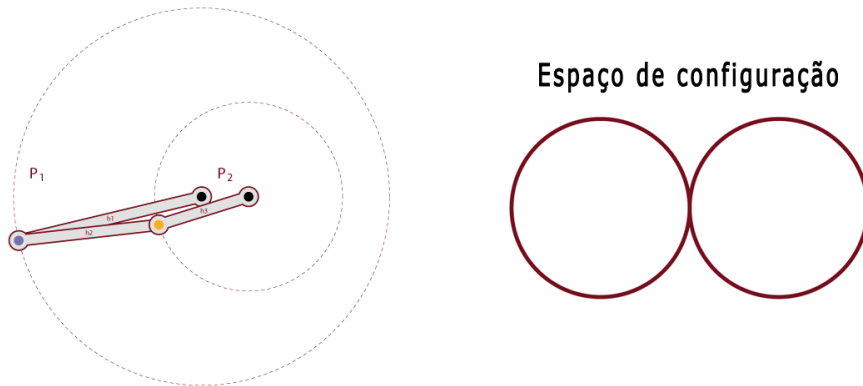


Figura 25: Espaço de configuração se $(=, >)$.

$(=, =)$

Como anteriormente, temos $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_3 + \ell_4$; mas agora também vale a igualdade $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Consequentemente, π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Uma vez que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, os conjuntos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são

ambos homeomorfos a circunferências. Acresce que \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam em dois pontos (C_π, P) e (C_0, Q) , com $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Por esse motivo, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências (topológicas) que se intersectam em dois pontos. Trata-se pois de uma curva homeomorfa à ilustrada na Figura 26.

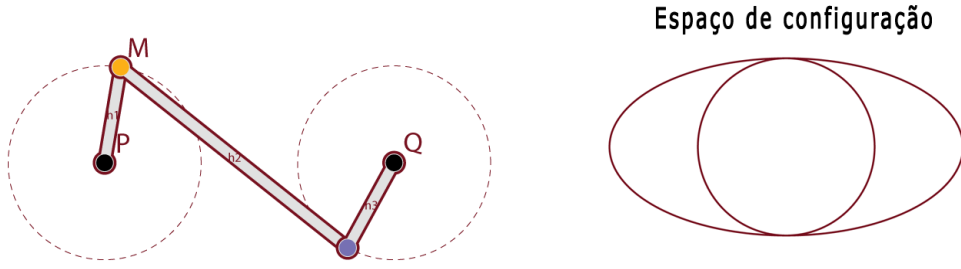


Figura 26: Espaço de configuração se $(=, =)$.

$(=, <)$

Como no caso anterior, $d_{\mathcal{M}}(\pi) = \ell_3 + \ell_4$. E, porque

$$|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_3 - \ell_4|,$$

existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e α_1 é o mínimo. Note-se que agora $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, 2\pi - \alpha_1]$ e, por isso, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a um arco de circunferência. A sua intersecção é $\{(C_{\alpha_1}, P), (C_{2\pi - \alpha_1}, Q), (C_\pi, R)\}$, onde $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ e (C_π, R) é interior aos arcos. Assim, do ponto de vista topológico, $[\mathcal{M}]$ é um **oito** (Figura 27).

$(<, >)$

Como vimos, nestas condições não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$. Logo, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . Além disso, não existe α_1 em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Logo π é o máximo de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e 0 é o mínimo. Uma vez que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, os conjuntos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a

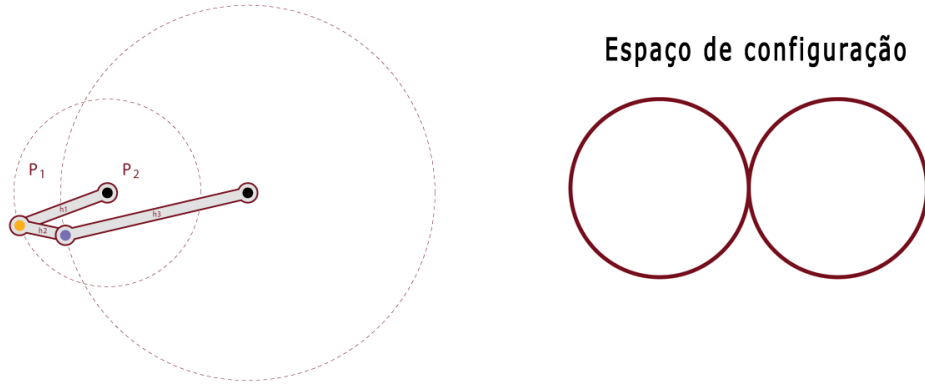


Figura 27: Espaço de configuração se $(=, <)$.

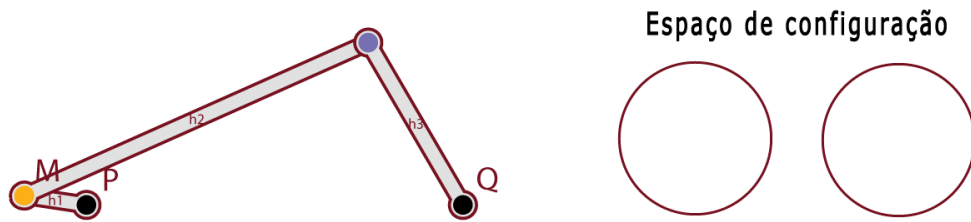


Figura 28: Espaço de configuração se $(<, >)$.

circunferências. E como $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$, o espaço de configuração é constituído por **duas circunferências disjuntas** (Figura 28).

$(<, =)$

Como não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$, sabemos que o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . E, de

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_3 - \ell_4|,$$

resulta que $d_{\mathcal{M}}(0) = |\ell_3 - \ell_4|$. Portanto, 0 é o mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Como $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [0, 2\pi]$, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são ambos homeomorfos a circunferências. Acresce que

\mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam num único ponto (C_0, P) , onde $P \in \mathbb{R}^2$. Por esse motivo, o espaço de configuração é constituído por duas circunferências que se intersectam num ponto, tratando-se pois de um **oito** (Figura 29).

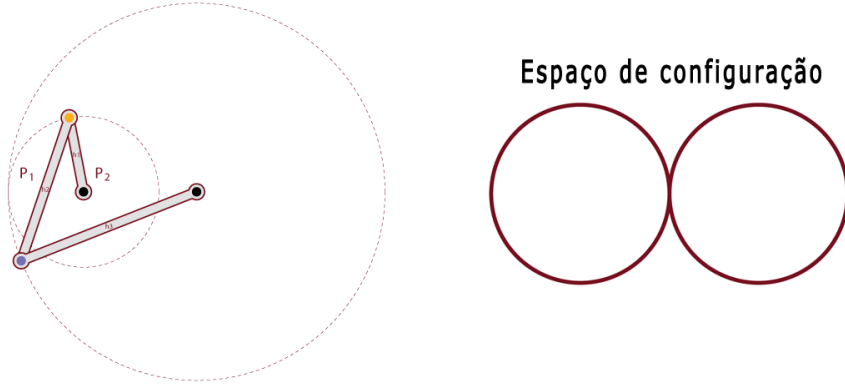


Figura 29: Espaço de configuração se $(<, =)$.

$(<, <)$

De novo, como não existe α em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4$, o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ é π . Mas, neste caso, existe $\alpha_1 \neq 0$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\alpha_1) = |\ell_3 - \ell_4|$. Portanto, π é o máximo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, α_1 é o mínimo. Note-se ainda que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, 2\pi - \alpha_1]$ e, portanto, \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são homeomorfos, cada um deles, a um arco de circunferência. Como \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 se intersectam apenas em (C_{α_1}, P) e $(C_{2\pi - \alpha_1}, Q)$, para alguns P, Q em \mathbb{R}^2 , estes arcos estão unidos nas extremidades, formando (do ponto de vista topológico) uma **circunferência** (Figura 30).

Em síntese,

Proposição 5.2. : Num quadrilátero articulado $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ tal que

$$\begin{aligned} \ell_1 &\neq \ell_2 \\ \ell_i &\neq \sum_{j=1, j \neq i}^4 \ell_j, \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\} \end{aligned}$$

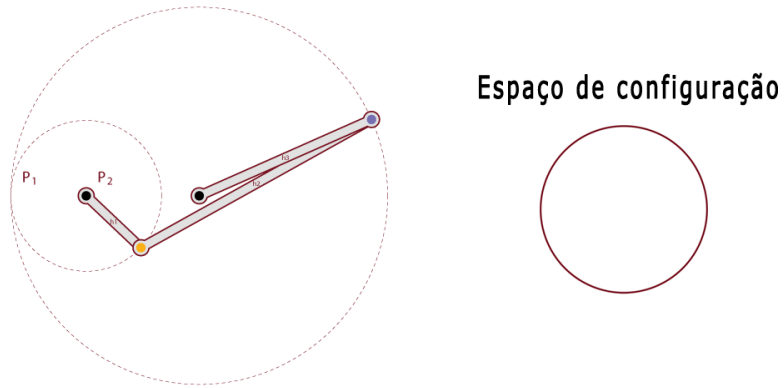


Figura 30: Espaço de configuração se $(<, <)$.

o espaço de configuração não se restringe a um ponto e temos:

<i>Condição</i>	<i>Espaço de configuração</i>
$(<, <) \text{ ou } (>, >)$	
$(<, >) \text{ ou } (>, <)$	
$(<, =), (>, =), (=, >) \text{ ou } (=, <)$	
$(=, =)$	

Observe-se na tabela anterior que, quando ocorrem igualdades, o espaço de configuração contém pontos singulares: pontos sem vizinhanças homeomorfas a \mathbb{R} .

No estudo anterior, privilegiámos um ponto móvel V_3 e duas hastes, de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 , e supusemos que $\ell_1 \neq \ell_2$ unicamente para evitarmos

que se desse $0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e $d_{\mathcal{M}}(0) = 0$. Contudo, se $\ell_1 = \ell_2$ e $\ell_3 \neq \ell_4$, nunca se tem $0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. Por esse motivo, na Proposição 5.2 podemos substituir a condição

$$\ell_1 \neq \ell_2$$

por

$$\ell_1 \neq \ell_2 \quad \text{ou} \quad \ell_3 \neq \ell_4.$$

Pode provar-se [5], usando um argumento que difere em poucos detalhes do anterior, que:

Proposição 5.3. *Num mecanismo $\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, d)$ em cadeia com 4 hastes tais que*

$$\ell_1 = \ell_2 \quad \text{e} \quad \ell_3 = \ell_4$$

e cujo espaço de configuração não se restringe a um ponto, temos:

<i>Condição</i>	<i>Espaço de configuração</i>
$(<, =) \text{ ou } (>, =)$	
$(=, =)$	

6 Pentágonos articulados

Verificámos na secção anterior que, do ponto de vista topológico, só há cinco possibilidades para o espaço de configuração de um quadrilátero articulado. Como veremos, a variedade de espaços de configuração resultantes de pentágonos articulados é também escassa. Por esse motivo, para além dos pentágonos articulados, analisaremos na próxima Secção um outro tipo de mecanismos que se obtêm destes por uma união apropriada de pontos e hastes.

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} , sejam P_1 e P_2 dois pontos de \mathbb{R}^2 tais que $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$. Então o espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ é o conjunto $\{(P_3, P_4, P_5) \in (\mathbb{R}^2)^3\}$ cujos pontos verificam as condições:

- $\|P_i - P_{i+1} \text{ (módulo 5)}\| = \ell_i$ para todo o $i \in \{2, 3, 4, 5\}$
- $P_3 = C_\alpha$ para algum $\alpha \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$.

Atentemos no seguinte exemplo.

6.1 Exemplo

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} , denotaremos por L e $-L$ os conjuntos

- $L = \{\ell_3 - (\ell_4 + \ell_5), \ell_4 - (\ell_3 + \ell_5), \ell_5 - (\ell_3 + \ell_4)\}$.
- $-L = \{\ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \ell_4 + \ell_5 - \ell_3, \ell_5 + \ell_3 - \ell_4\}$.

Caso I

Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} com comprimentos 20, 9, 3, 4 e 5. Pela Proposição 4.3, $\max(d_\mathcal{M}) = \ell_1 + \ell_2 = 29$ e $\min(d_\mathcal{M}) = |\ell_1 - \ell_2| = 11$. Como $\max(d_\mathcal{M}) > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 = 12$, o máximo α_0 de $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ é diferente de π e, portanto, novamente pela Proposição 4.3, temos $d_\mathcal{M}(\alpha_0) = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$. Logo, α_0 é o ângulo interno do triângulo de lados ℓ_1 , ℓ_2 e $\ell_3 + \ell_4 + \ell_5$, ou seja, 20, 9 e 12, compreendido entre os lados de comprimentos 20 e 9 (Figura 31). Por esse motivo,

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{20^2 + 9^2 - 12^2}{2 \times 20 \times 9}\right) = \arccos\left(\frac{337}{360}\right).$$

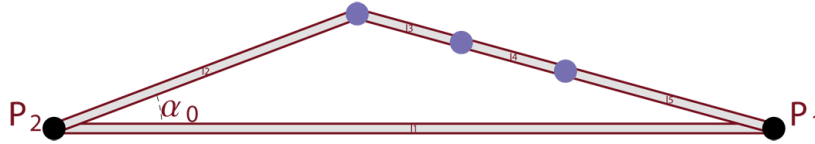


Figura 31: Ângulo α_0 .

Por outro lado, $11 = \min(d_\mathcal{M}) > \max L = -2$. Consequentemente, pela Proposição 4.3, o mínimo de $\mathcal{E}_\mathcal{M}$ é 0 e $\mathcal{D}_\mathcal{M} = [0, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi]$. Podemos pois reposicionar os elementos de $\mathcal{D}_\mathcal{M}$ e supor que $\mathcal{D}_\mathcal{M} = [-\alpha_0, \alpha_0]$.

Analisemos agora o espaço de configuração de \mathcal{M}_α , para os outros valores de $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$. Para isso, bastará determinar, para cada α , o par de relações entre $d_\mathcal{M}(\alpha) + \ell_3$ e $\ell_4 + \ell_5$, e entre $|d_\mathcal{M}(\alpha) - \ell_3|$ e $|\ell_4 - \ell_5|$, e depois aplicar a Proposição 5.2. Eis o que se obtém:

- $\alpha = \pm\alpha_0$

Tem-se $d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$, e o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M}_α é um **ponto**.

- $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$

Como

$$d_{\mathcal{M}}(\alpha) + \ell_3 \geq \min(d_{\mathcal{M}}) + \ell_3 = 14 > 9 = \ell_4 + \ell_5$$

e

$$|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3| \geq 8 > 1 = |\ell_4 - \ell_5|,$$

tem-se $(>, >)$, pelo que o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M}_α para cada um destes α é uma **circunferência**.

Podemos agora considerar o espaço de configuração do pentágono articulado \mathcal{M} como sendo obtido através da junção, às *camadas*, de todos os espaços de configuração de \mathcal{M}_α , onde $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, isto é,

- dois pontos, correspondentes a α_0 e $-\alpha_0$;
- circunferências, para os valores de $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$.

É o que se representa na Figura 32, feita com o programa *Mathematica* precisamente como união parametrizada por α destas curvas. Na Secção 9 podem ler-se mais detalhes sobre como construir este modelo e as animações correspondentes do módulo interactivo. A justificação para este modo de unir as fatias \mathcal{M}_α será apresentada nas Secções 6.2 e 3.1.

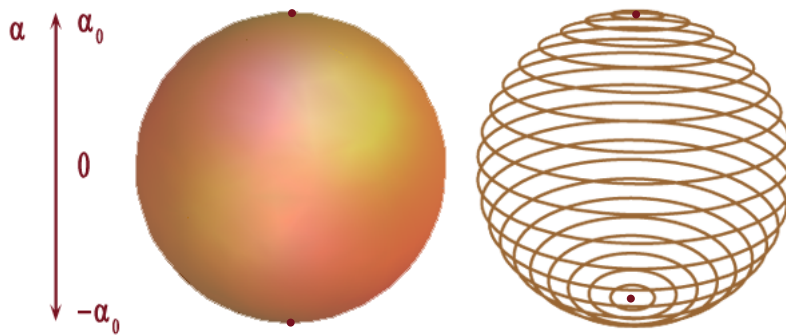


Figura 32: Espaço de configuração do Caso I: união de fatias \mathcal{M}_α .

Caso II

Diminuamos agora progressivamente o comprimento ℓ_1 , mantendo-o sempre sob a condição $\ell_1 > 15$. Obtemos espaços de configuração do tipo descrito no caso anterior, isto é, pontos nos extremos, quando $\alpha = \pm\alpha_0$, e circunferências para os valores de α no interior do intervalo $[-\alpha_0, \alpha_0]$. O espaço de configuração é o que se representa na Figura 33 ou, equivalentemente, na Figura 32.

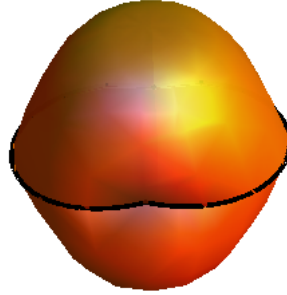


Figura 33: Espaço de configuração do Caso II, homeomorfo ao anterior.

Caso III

Quando $\ell_1 = 15$, continuamos a ter

$$\begin{aligned} \max d_{\mathcal{M}} &> \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 \\ \min d_{\mathcal{M}} &> \max L. \end{aligned}$$

Portanto, podemos continuar a supor que $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, sendo neste caso

$$\alpha_0 = \arccos \left(\frac{15^2 + 9^2 - 12^2}{2 \times 15 \times 9} \right) = \arccos \left(\frac{3}{5} \right).$$

Além disso, quando:

- $\alpha = \pm\alpha_0$

Concluimos que o espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} é um **ponto**.

- $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$

Agora temos $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3| > |\ell_4 - \ell_5|$. Por outro lado, $d_{\mathcal{M}}(0) + \ell_3 = 9 = \ell_4 + \ell_5$ e $d_{\mathcal{M}}(\alpha) + \ell_3 > \ell_4 + \ell_5$, para todo $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$. Consequentemente, temos $(>, >)$ para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$, e $(=, >)$ para $\alpha = 0$.

Logo o espaço de configuração de \mathcal{M}_α é sempre uma circunferência, excepto quando $\alpha = 0$, em que é um oito.

Em síntese:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$0 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = 0$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < 0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

Assim, o espaço de configuração do mecanismo \mathcal{M} é como se mostra na Figura 34.

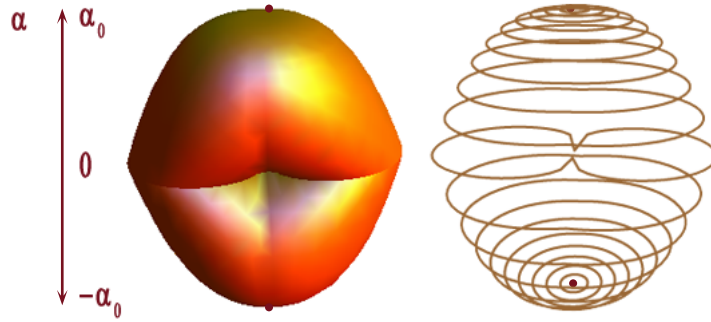


Figura 34: Espaço de configuração do Caso III.

Caso IV

Se diminuirmos o comprimento de ℓ_1 , para valores em $]13, 15[$, continuaremos a ter $\mathcal{E}_\mathcal{M} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, com $0 < \alpha_0 < \pi$, mas agora o tipo de espaço de configuração de \mathcal{M}_α varia para diferentes valores de α em $\mathcal{E}_\mathcal{M}$.

Fixemos $\ell_1 \in]13, 15[$. Por um lado, temos $|d_\mathcal{M}(\alpha) - \ell_3| > |\ell_4 - \ell_5|$, para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_\mathcal{M}$. Por outro,

$$d_\mathcal{M}(\alpha_0) + \ell_3 > \ell_4 + \ell_5 > |\ell_1 - \ell_2| + 3 = d_\mathcal{M}(0) + \ell_3.$$

Existe, pois, $\beta_1 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$, e a única mudança nas relações ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$). Em resumo:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

O espaço de configuração é o que se representa na Figura 35.

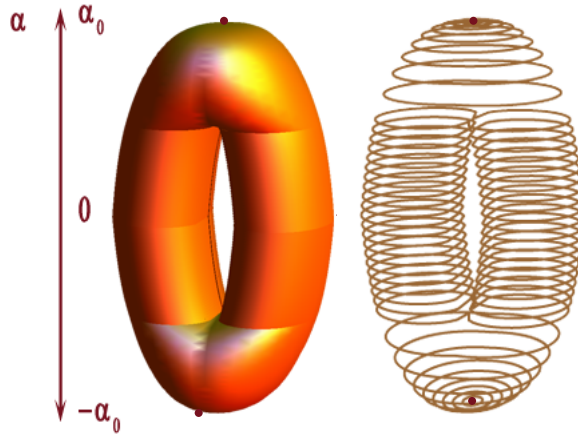


Figura 35: Espaço de configuração do Caso IV.

Caso V

Quando $\ell_1 = 13$, mantém-se a igualdade $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, onde $\alpha_0 = \arccos\left(\frac{53}{117}\right)$. Também, como no caso anterior, existe $\beta_1 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$, e a única mudança na primeira relação ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$). Porém, $|d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3| > |d_{\mathcal{M}}(0) - \ell_3| = |\ell_4 - \ell_5|$, para todo o $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$. Por este motivo, a única mudança na segunda relação ocorre em 0. Em resumo:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$0 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = 0$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < 0$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

O espaço de configuração é agora como o da Figura 36.



Figura 36: Espaço de configuração do Caso V.

Caso VI

Se continuarmos a diminuir ℓ_1 , para valores em $]11, 13[$, teremos $\mathcal{E}_\mathcal{M} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, para algum $0 < \alpha_0 < \pi$. Fixado $\ell_1 \in]11, 13[$, então:

- existe $\beta_1 \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$ tal que $d_\mathcal{M}(\beta_1) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$ e a única mudança na primeira relação ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$);
- $d_\mathcal{M}(\alpha_0) - \ell_3 > \ell_5 - \ell_4 > d_\mathcal{M}(0) - \ell_3$;
- consequentemente, existe $\beta_2 \in \mathcal{D}_\mathcal{M} \setminus \{0\}$ tal que $d_\mathcal{M}(\beta_2) = \ell_5 + \ell_3 - \ell_4$ e $\beta_2 < \beta_1$;

- $d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3 > \ell_4 - \ell_5$, para todo o α ;
- verifica-se uma única variação do sinal da segunda relação, e ocorre quando $\alpha = \beta_2$ (e $-\beta_2$).

Ou seja:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

O espaço de configuração é como o que se ilustra na Figura 37.

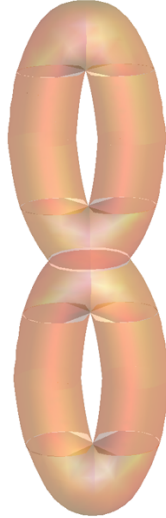


Figura 37: Espaço de configuração do Caso VI.

Caso VII

Quando $\ell_1 = 11$, $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, para algum $0 < \alpha_0 < \pi$. Então:

- existe $\beta_1 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_1) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$ e a única mudança na primeira relação ocorre na vizinhança de β_1 (e de $-\beta_1$);
- existe $\beta_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$, com $\beta_2 < \beta_1$, tal que $d_{\mathcal{M}}(\beta_2) = \ell_5 + \ell_3 - \ell_4$;
- $d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3 > d_{\mathcal{M}}(0) - \ell_3 = -1 = \ell_4 - \ell_5$, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$.

Em resumo:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_{α}
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$0 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = 0$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < 0$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

O espaço de configuração é como o que a Figura 38 apresenta.

Caso VIII

Se $\ell_1 \in]9, 11[$, então $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [-\alpha_0, \alpha_0]$, para algum $0 < \alpha_0 < \pi$, e existem $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \setminus \{0\}$ tais que:

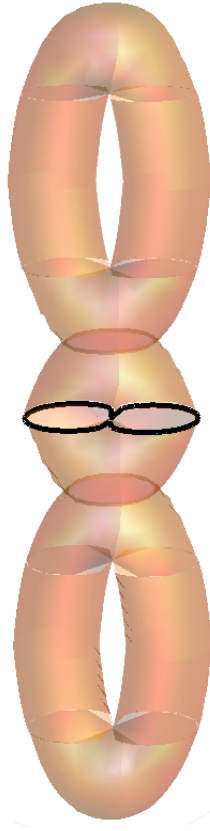


Figura 38: Espaço de configuração do Caso VII.

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$\beta_3 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = \beta_3$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_3 < \alpha < \beta_3$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_3$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < -\beta_3$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

O espaço de configuração é o da Figura 39.

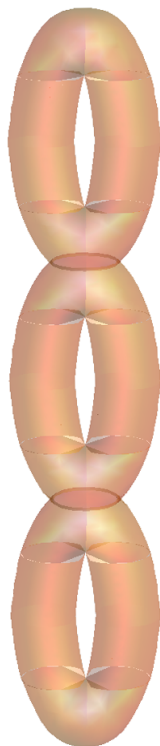


Figura 39: Espaço de configuração do Caso VIII

6.2 Modelo

Vimos na Secção 3.1 que o espaço de configuração de um mecanismo com um ponto fixo, dois pontos móveis e duas hastes como o da Figura 40 pode ser descrito por dois ângulos (μ, α) e que essa representação nos leva naturalmente a um toro.

Fixemos agora o pentágono articulado cujas hastes medem 3, 1, 5, 3, 11 e uma sua realização. Se impusermos que a concavidade entre as hastes h_4 e h_5 é sempre não-negativa, a realização fica completamente determinada pelos ângulos orientados $\alpha \in [0, \alpha_0]$, entre as hastes h_1 e h_2 , e μ , entre a haste h_3 e a direcção $\overrightarrow{P_3P_1}$, como indica a Figura 41.

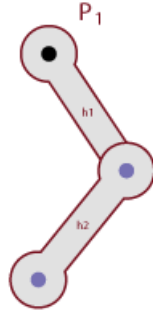


Figura 40: Mecanismo com duas hastes.

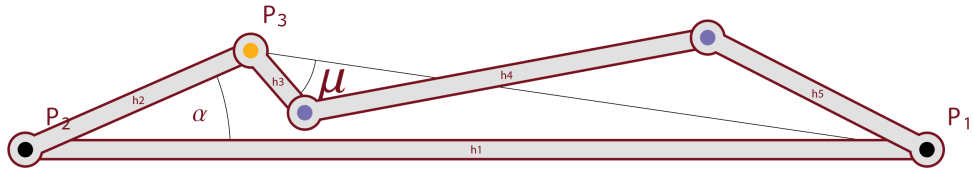


Figura 41: Ângulos α e μ .

Note-se que, para este mecanismo, $0 < \alpha_0 < \pi$, e que, para cada α , os valores permitidos de $\mu(\alpha)$ estão num intervalo $[-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]$, onde $\mu_0(\alpha) \in [0, \pi]$. E, portanto, só uma parte do quadrado e do toro que construímos na Secção 3.1 intervém na descrição do espaço de configuração. A Figura 42 mostra uma posição do mecanismo em que $\mu(\alpha) = 0$. O domínio de tais (μ, α) no toro forma a região sombreada \mathfrak{R}_1 da Figura 43.

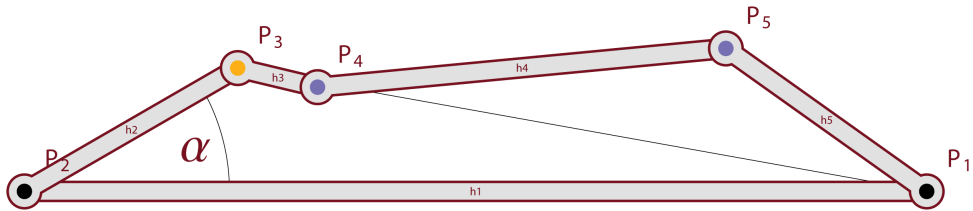


Figura 42: $\mu(\alpha) = 0$: P_3 , P_4 e P_5 alinhados.

O mesmo argumento vale para realizações deste mecanismo em que a concavidade entre as hastes h_4 e h_5 é sempre não-positiva, sendo agora a

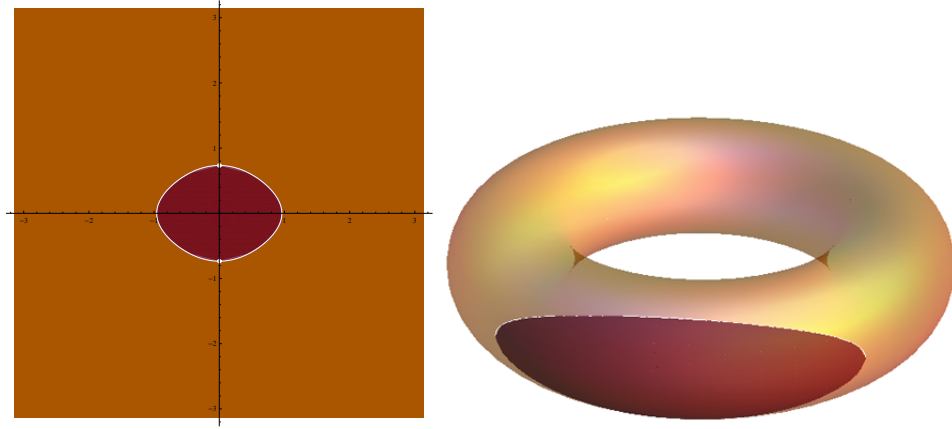


Figura 43: \mathfrak{R}_1

posição do mecanismo descrita univocamente pelos ângulos $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ e $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$. Assim, obtemos duas regiões, \mathfrak{R}_1 e \mathfrak{R}_2 , que têm em comum os pares (μ, α) em que a concavidade é nula (Figura 44). Estes pares em comum situam-se na fronteira de cada uma das regiões uma vez que, para α não negativo, o ângulo $\mu_0(\alpha) \in [0, \pi]$ é função contínua e estritamente decrescente de α . Por isso, o modelo que descreve todas as realizações deste mecanismo obtém-se identificando as duas regiões pelos bordos, como mostra a Figura 45. Observe-se como cada nível de α com os extremos identificados forma uma curva homeomorfa a uma circunferência (Figura 46). De novo, é a topologia quociente que mais bem se ajusta a esta representação do espaço de configuração do mecanismo.

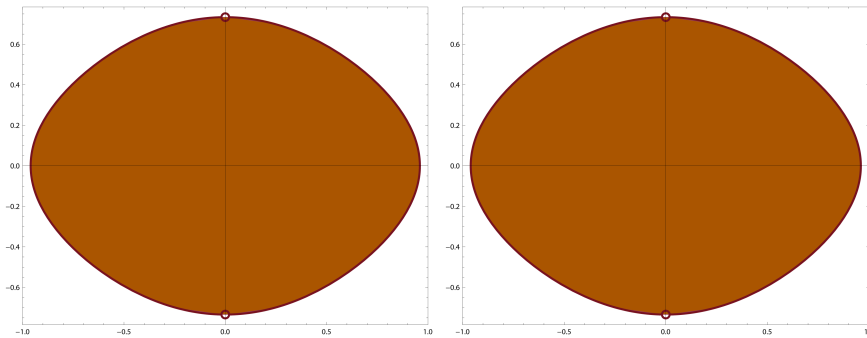


Figura 44: \mathfrak{R}_1 e \mathfrak{R}_2 .

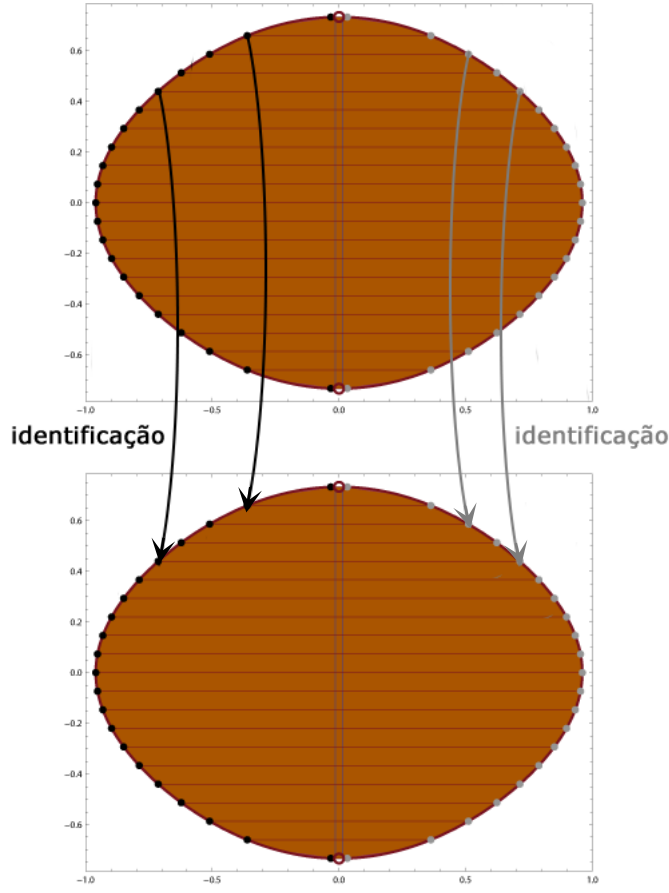


Figura 45: Colagem dos bordos de \mathfrak{R}_1 a \mathfrak{R}_2 .

Uma imagem mais simétrica do modelo, por ter em conta as amplitudes dos ângulos, pode obter-se desenhando um cilindro e impondo que o perímetro de cada circunferência seja exactamente o dobro da amplitude do intervalo $[-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]$; depois acrescentamos ao cilindro um ponto para cada par $(0, \alpha_0)$ e $(0, -\alpha_0)$. O modelo que assim obtemos é homeomorfo a uma esfera (Figura 47).

Analiseemos, porém, com mais detalhe o que acontece para $\alpha = \alpha_0$ ou $\alpha = -\alpha_0$. Face à Figura 47, que representa um cilindro aberto, a intuição diz-nos que basta acrescentar um ponto em cima e outro em baixo para obter uma representação completa e adequada do espaço de configuração. Mas um cilindro como os da Figura 48 também poderia ser usado como modelo se nos restringíssemos aos valores $-\alpha_0 < \alpha < \alpha_0$ e, aqui já não parece haver

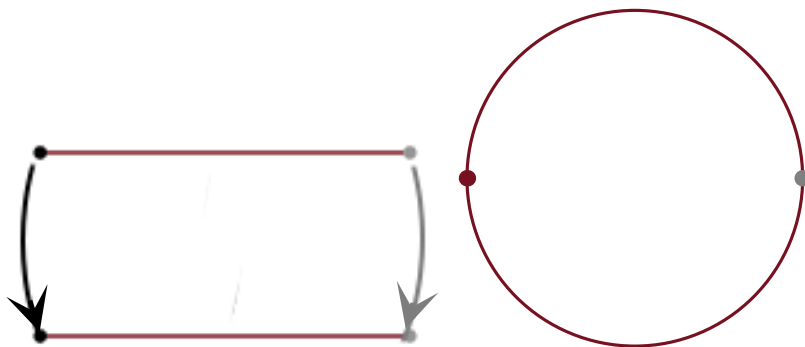


Figura 46: Detalhe das identificações.

maneira única, ou natural, de acrescentar um ponto em cima e outro em baixo.

À parte a forma, o que é essencialmente diferente nestas figuras? No primeiro caso (Figura 49), por mais pequena que seja a vizinhança de cada ponto que é acrescentado, ela contém circunferências inteiras (parametrizadas por μ , para α constante), enquanto no segundo caso isso não acontece (como mostra a Figura 50).

Para decidirmos qual é afinal a boa escolha, voltemos ao espaço de configuração: o ponto que se está a acrescentar em cima corresponde a $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = 0$, que, no mecanismo, determina a posição representada na Figura 51. Ora, por mais pequena que seja a vizinhança de $(0, \alpha_0)$, como $\mu_0(\alpha)$ tende para 0 quando α se aproxima de α_0 (Figura 52), é possível encontrar α suficientemente próximo de α_0 tal que o conjunto

$$\{(\mu, \alpha) : \mu \in [-\mu_0(\alpha), \mu_0(\alpha)]\}$$

está contido na vizinhança fixada. Consequentemente, devemos poder afirmar que, no modelo, por mais pequena que seja a vizinhança do ponto de cima que se está a acrescentar, ela deverá conter circunferências de nível α do tipo indicado. A boa escolha de modelo é, portanto, a apresentada na Figura 47.

Alterando o perímetro das circunferências de nível α , podemos transformar o modelo numa esfera (geométrica) sem que ele perca qualquer uma das propriedades topológicas referidas (Figura 53).

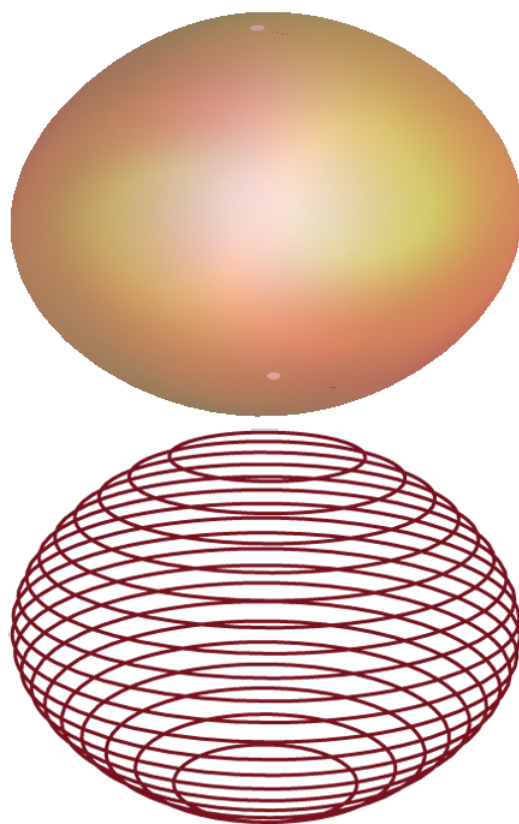


Figura 47: Modelo do espaço de configuração.

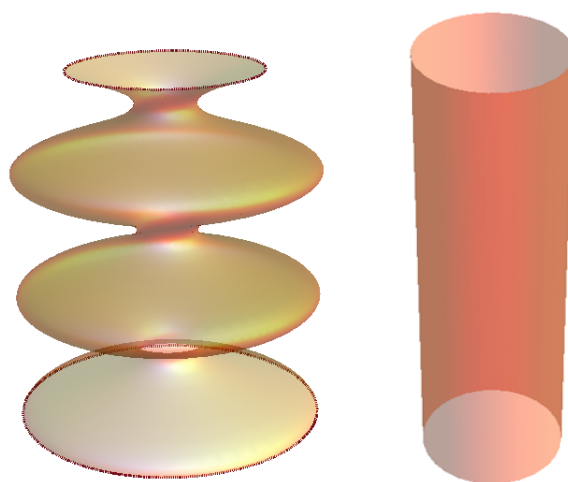


Figura 48: Outras formas para o empilhamento das circunferências.

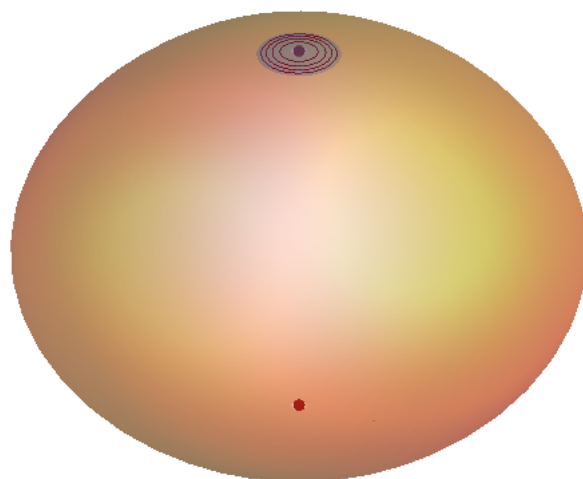


Figura 49: Vizinhaça do ponto acrescentado.

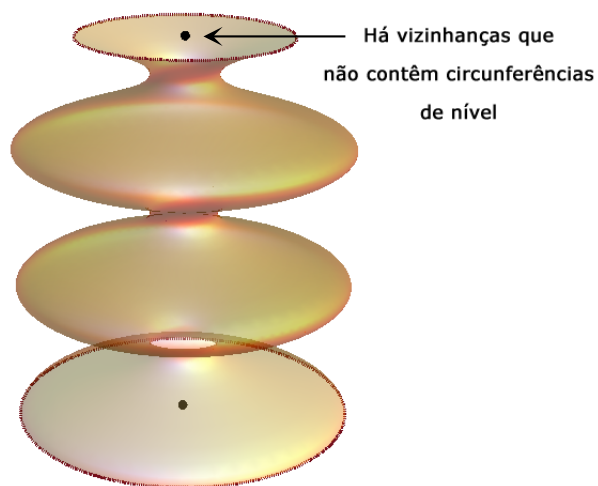


Figura 50: Modelo com defeito.

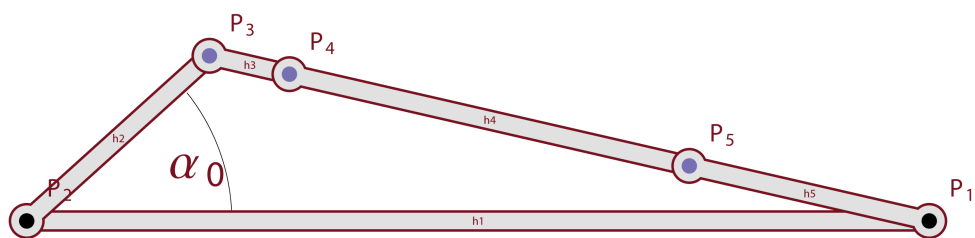


Figura 51: $\alpha = \alpha_0$ e $\mu = 0$.

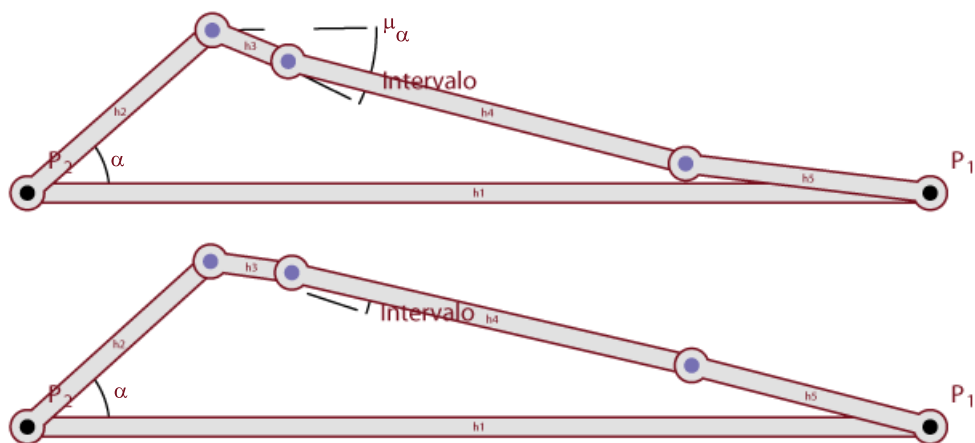


Figura 52: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_0(\alpha) = 0$.

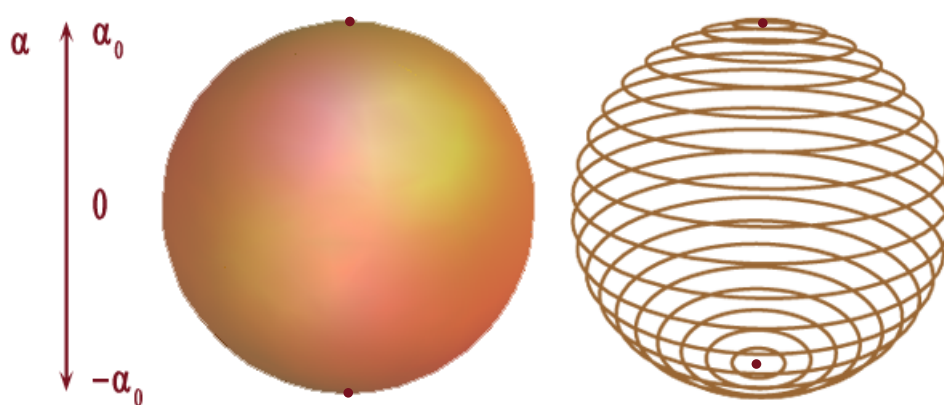


Figura 53: Modelo simétrico.

6.3 Espaços de configuração degenerados

Na maioria dos espaços de configuração descritos na Secção 6.1, em que mantivemos fixos os comprimentos $\ell_2 = 9$, $\ell_3 = 3$, $\ell_4 = 4$, $\ell_5 = 5$ e variámos ℓ_1 entre 9 e 20, cada ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a um disco do plano. São portanto *superfícies*³. Mas isso não acontece nos casos III, V e VII: apesar de também serem parametrizáveis por duas variáveis, contêm pontos sem nenhuma vizinhança homeomorfa a uma bola do plano. Diremos que são espaços **degenerados**.

ℓ_1	Espaço de configuração
20	Homeomorfo a uma esfera
$15 < \ell_1 < 20$	Homeomorfo a uma esfera
15	Degenerado
$13 < \ell_1 < 15$	Homeomorfo a um toro
13	Degenerado
$11 < \ell_1 < 13$	Homeomorfo a um bi-toro
11	Degenerado
$9 < \ell_1 < 11$	Homeomorfo a um tri-toro

Proposição 6.1. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado. O espaço de configuração de \mathcal{M} é **degenerado** se alguma das seguintes condições se verifica:*

1. $[\mathcal{M}]$ só contém um ponto.
2. Existe uma realização de \mathcal{M} com dois pontos, fixos ou móveis, sobrepostos.
3. Existe $\beta \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\beta}]$ é uma curva como as da Figura 54.

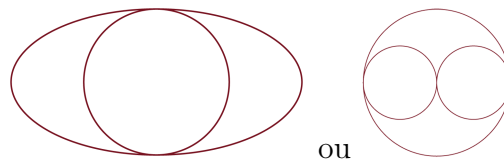


Figura 54: Curvas $[\mathcal{M}_{\beta}]$ de um espaço de configuração degenerado.

³Sobre este conceito, veja-se também [10].

4. Existe $\gamma \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que:

- $[\mathcal{M}_{\gamma}]$ é um oito e existe uma vizinhança \mathcal{W} de γ em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é uma circunferência, para todo o α em $\mathcal{W} \setminus \{\gamma\}$

ou

- $[\mathcal{M}_{\gamma}]$ é um oito e existe uma vizinhança \mathcal{W} de γ em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é um par de circunferências disjuntas, para todo o α em $\mathcal{W} \setminus \{\gamma\}$.

5. Existe δ , no interior de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ ou igual a 0, tal que $[\mathcal{M}_{\delta}]$ se reduz a um ponto.

6. $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} \neq [0, 2\pi]$ e não existe α extremo de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é um ponto.

As condições anteriores podem reformular-se usando relações entre os comprimentos das hastes do mecanismo, como descreve a próxima proposição.

Proposição 6.2. *Um pentágono articulado tem espaço de configuração degenerado se alguma das seguintes condições se verifica:*

1. $\exists i \in \{1, \dots, 5\} : \ell_i = \sum_{k=1, k \neq i}^5 \ell_k$.
2. $\ell_1 = \ell_2, \ell_3 \leq \ell_4 + \ell_5$ e $\ell_3 \geq |\ell_4 - \ell_5|$.
3. $\ell_1 = \ell_5, \ell_2 \leq \ell_3 + \ell_4$ e $\ell_2 \geq |\ell_3 - \ell_4|$.
4. $\ell_2 = \ell_3, \ell_1 \leq \ell_4 + \ell_5$ e $\ell_1 \geq |\ell_4 - \ell_5|$.
5. $\ell_4 = \ell_5, \ell_1 \leq \ell_2 + \ell_3$ e $\ell_1 \geq |\ell_2 - \ell_3|$.
6. $\ell_3 = \ell_4, \ell_1 \leq \ell_2 + \ell_5$ e $\ell_1 \geq |\ell_2 - \ell_5|$.
7. $\ell_3 = \ell_5, \ell_4 \in d_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}_{\mathcal{M}})$.
8. $|\ell_1 - \ell_2| \in -L$.
9. $\ell_1 + \ell_2 \in -L$.
10. $|\ell_1 - \ell_2| = \max L$.
11. $\ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$.

Demonstração. Pela Proposição 4.1, a condição (1) do enunciado da Proposição 6.2 é equivalente à condição (1) da Definição 6.1.

Suponhamos que a condição (1) da Definição 6.1 não é válida, mas se verifica (2). Esta condição é verdadeira se e só se ocorrer uma das situações descritas na Figura 55, equivalentes às condições (2), (3), (4), (5) e (6) da Proposição 6.2, respectivamente.

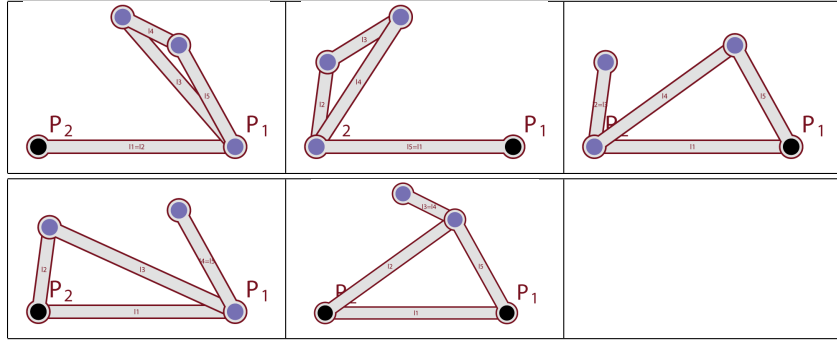


Figura 55: Posições degeneradas.

Suponhamos agora que nem a condição (1) nem a (2) da Definição 6.1 são válidas, mas a condição (3) se verifica. Pelas Proposições 5.2 e 5.3, dado $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, o espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} é uma das curvas do enunciado de (3) se e só se

$$(A) \quad \ell_4 = \ell_5 \quad \text{e} \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) = \ell_3$$

ou

$$(B) \quad d_{\mathcal{M}}(\alpha) + \ell_3 = \ell_4 + \ell_5 \quad \text{e} \quad |d_{\mathcal{M}}(\alpha) - \ell_3| = |\ell_4 - \ell_5|.$$

Ora a condição (B) é equivalente a

$$(C) \quad \ell_3 = \ell_5 \quad \text{e} \quad \ell_4 = d_{\mathcal{M}}(\alpha)$$

ou

$$(D) \quad \ell_3 = \ell_4 \quad \text{e} \quad \ell_5 = d_{\mathcal{M}}(\alpha).$$

Além disso, tanto (A) como (D) são casos particulares das condições (5) e (6) da Proposição 6.2. Por outro lado, se se verificar (C), o espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} é uma das curvas ilustradas na alínea (3) da Definição 6.1. Daqui deduzimos a condição (7) da Proposição 6.2.

Prossigamos, supondo que as condições (1), (2) e (3) da Definição 6.1 não se verificam, mas ocorre (4). Em particular, existe γ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $d_{\mathcal{M}}(\gamma)$

é um elemento de $-L$. Analisemos primeiro o caso em que $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq \pi$. Note-se que γ não é máximo nem mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ (caso contrário, $[\mathcal{M}_{\gamma}]$ seria um ponto e não um oito). Suponhamos que $d_{\mathcal{M}}(\gamma) = \ell_4 + \ell_5 - \ell_3$ (os restantes casos tratam-se de modo análogo). Como

$$\ell_4 + \ell_5 - \ell_3 \neq \ell_4 + \ell_3 - \ell_5$$

e

$$\ell_4 + \ell_5 - \ell_3 \neq \ell_5 + \ell_3 - \ell_4,$$

a primeira relação toma valores diferentes, respectivamente, à esquerda e à direita de γ , enquanto a segunda não muda. Isso significa que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é de um tipo diferente (circunferência/par de circunferências disjuntas) à direita e à esquerda de γ e, portanto, qualquer vizinhança de γ em $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ contém circunferências e pares de circunferências disjuntas. Mas isso contradiz (4). E, portanto, devemos ter $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$. Assim, a condição (4) da Definição 6.1 implica que se tenha

$$(A) \quad 0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \quad \text{e} \quad [\mathcal{M}_0] \quad \text{é um oito}$$

ou

$$(B) \quad \pi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \quad \text{e} \quad [\mathcal{M}_{\pi}] \quad \text{é um oito.}$$

Observe-se finalmente que (A) é equivalente à condição (8) da Proposição 6.2, enquanto (B) equivale à condição (9) da mesma Proposição.

Se ocorrer a condição (5) da Definição 6.1, então existe ξ em $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, definido por

$$\xi = \delta$$

ou

$$\xi = 2\pi - \delta$$

tal que $[\mathcal{M}_{\xi}]$ é um ponto e, portanto,

$$d_{\mathcal{M}}(\xi) = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$$

ou

$$d_{\mathcal{M}}(\xi) = \max L.$$

Pela Proposição 4.3, se $\delta \neq 0$ e $\delta \neq \pi$, então, ou ξ é máximo ou é mínimo de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Em ambos os casos, δ é um elemento da fronteira de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, o que contradiz (5). Concluimos assim que a condição (5) da Definição 6.1 só é válida se $\delta = 0$ ou $\delta = \pi$. Ora, afirmar que $0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $[\mathcal{M}_0]$ é um ponto equivale à igualdade $|\ell_1 - \ell_2| = \max L$ (que é a condição (10) da Proposição 6.2),

enquanto que dizer que $\pi \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $[\mathcal{M}_{\pi}]$ é um ponto é equivalente à igualdade $\ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$ (que é a condição (11) da Proposição 6.2). Assim, dar-se a condição (5) da da Definição 6.1 é equivalente a ser válida a afirmação (10) ou (11) da Proposição 6.2.

Falta apenas analisar o cenário indicado na condição (6) da Definição 6.1. Se $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} \neq [0, 2\pi]$, então $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \neq [0, \pi]$. Pela Proposição 4.3, existe α na fronteira de $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ é um ponto e, pela mesma Proposição, α pertence à fronteira de $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. A condição (6) é, pois, impossível no caso dos pentágonos articulados. \square

6.4 Genus e simetria

Regressemos ao Exemplo 6.1 e observemos os espaços de configuração dos três casos não degenerados aí apresentados. Constatamos que a diferença mais relevante entre eles está no número de *oitos* que surgem no espaço de configuração de \mathcal{M}_{α} . Se conhecêssemos de antemão esse número de oitos, saberíamos descrever imediatamente o espaço de configuração do mecanismo: seria formado pela junção, *por camadas*, de um ponto, seguido de circunferências, seguido de um oito (se existisse), seguido de circunferências disjuntas, etc, seguido de circunferências e terminando num ponto. Ora, numericamente, esse número de oitos é precisamente o dobro do número de elementos de $-L$ no intervalo $[|\ell_1 - \ell_2|, \ell_1 + \ell_2]$.

Analisemos o exemplo seguinte para identificarmos outro aspecto de natureza topológica a ter em conta nos espaços de configuração.

6.4.1 Exemplo

Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} , com comprimentos 8, 5, 1, 2, 5. Como $8 + 5 > 1 + 2 + 5$ e $8 - 5 > 5 - (1 + 2) = \max L$, concluímos que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0]$, para algum α_0 com $0 < \alpha_0 < \pi$. Tal como no Exemplo 6.1, podemos provar que existem $\beta_2 < \beta_1$ em $[0, \alpha_0]$ tais que:

Condição sobre α	Relações	Espaço de configuração de \mathcal{M}_α
$\alpha = \alpha_0$	$(>, >)$	Ponto
$\beta_1 < \alpha < \alpha_0$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = \beta_1$	$(=, >)$	Oito
$\beta_2 < \alpha < \beta_1$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_2 < \alpha < \beta_2$	$(<, <)$	Circunferência
$\alpha = -\beta_2$	$(<, =)$	Oito
$-\beta_1 < \alpha < -\beta_2$	$(<, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\beta_1$	$(=, >)$	Oito
$-\alpha_0 < \alpha < -\beta_1$	$(>, >)$	Circunferência
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Ponto

O espaço de configuração é assim como o da Figura 56.

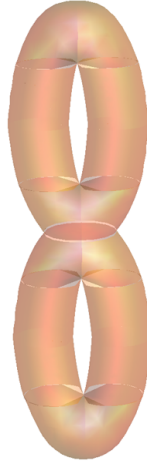


Figura 56: Espaço de configuração do Exemplo 6.4.1 com $\ell_1 = 8$.

Diminuamos agora o valor de ℓ_1 em uma unidade. Temos então

$$\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$$

e

$$|\ell_1 - \ell_2| = \max L.$$

O quadro para $[\mathcal{M}_\alpha]$ difere do anterior num pormenor: como $|\ell_1 - \ell_2| = \max L$, então $[\mathcal{M}_0]$ é um ponto. Por esse motivo, o espaço de configuração tem a forma apresentada na Figura 57.

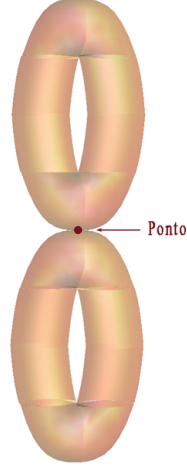


Figura 57: Espaço de configuração do Exemplo 6.4.1 com $\ell_1 = 7$.

Por fim, diminuindo ℓ_1 mais uma unidade, obtemos

$$\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$$

e

$$\max L > |\ell_1 - \ell_2|.$$

Desse modo, $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0] \cup [2\pi - \alpha_0, 2\pi - \alpha_1]$, para alguns α_0, α_1 com $0 < \alpha_1 < \alpha_0 < \pi$, e o espaço de configuração é o da Figura 58.

Note-se que, neste exemplo, alterámos o espaço de configuração com uma componente conexa⁴ e quatro oitos até terminarmos num espaço com duas componentes conexas, cada uma com dois oitos. O que determinou essa mudança no número de oitos e de componentes conexas? O facto de 0 pertencer ou não a $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Em termos mecânicos, tal significa que as hastes móveis conseguem passar da posição no semiplano acima da linha que une P_1 a P_2 para a posição **simétrica** mas no semiplano abaixo. Conclusão análoga resultaria se tivéssemos considerado π em vez de 0. Numericamente, trata-se de determinar quantos elementos de $\{0, \pi\}$ pertencem a $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ ou, equivalentemente, quantos elementos de $\{|\ell_1 - \ell_2|, \ell_1 + \ell_2\}$ pertencem ao intervalo $[\max L, \ell_3 + \ell_4 + \ell_5]$. Por isso, os espaços de configuração que obtivemos

⁴Um espaço topológico X diz-se conexo se não for a união de dois abertos não-vazios e disjuntos. Os subconjuntos conexos maximais (relativamente à inclusão) de X dizem-se componentes conexas de X ; são subconjuntos fechados e formam uma partição de X ; se forem em número finito, são também abertos.

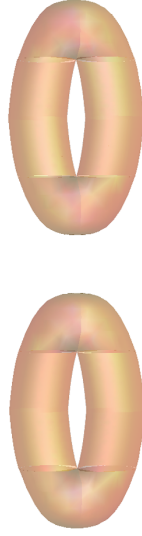


Figura 58: Espaço de configuração do Exemplo 6.4.1 com $\ell_1 = 6$.

neste exemplo têm uma ou duas componentes conexas.

Proposição 6.3. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. O espaço de configuração de \mathcal{M} é conexo se e só se*

- $\{0, \pi\} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$
e
- existe $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha}]$ não é um par de circunferências disjuntas.

Caso contrário, se alguma das exigências da Proposição 6.3 falhar, o espaço de configuração de \mathcal{M} tem duas componentes conexas.

O Exemplo 6.4.1 e as considerações anteriores sugerem a seguinte definição.

Definição 6.1. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado com espaço de configuração não degenerado. Designamos por **genus** de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ o número*

$$\frac{n_1}{2} + n_2 - 1$$

onde

$$n_1 = \text{número de oitos existentes em } \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [\mathcal{M}_{\alpha}]$$

e

$n_2 = \text{número de elementos de } \{0, \pi\} \text{ em } \mathcal{E}_{\mathcal{M}}.$

Note-se que n_1 é sempre par, logo o genus é um inteiro maior ou igual a -1 . Foram estes os valores obtidos nos vários casos do Exemplo 6.1 em que o espaço de configuração não é degenerado:

Caso	n_1	n_2	Genus
I	0	1	0
II	0	1	0
IV	2	1	1
VI	4	1	2
VIII	6	1	3

6.5 Genus menor ou igual a 4

Dado um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]$ é não degenerado, como $-L$ tem no máximo 3 elementos, tem-se

$$\frac{n_1}{2} \leq 3.$$

Além disso, como $\{0, \pi\}$ só tem dois elementos,

$$n_2 \leq 2.$$

Assim, o genus de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ é menor ou igual a 4.

Definição 6.2. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado com espaço de configuração $[\mathcal{M}]$ não degenerado e tal que $[\mathcal{M}]$ tem uma só componente conexa. Diremos que $[\mathcal{M}]$ é:*

- Uma **esfera** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 0.
- Um **toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 1.
- Um **bi-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 2.
- Um **tri-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for 3.

- Um ***n*-toro** se o genus de $[\mathcal{M}]$ for n , para algum natural $n \geq 3$.

Vimos já exemplos de mecanismos cujo espaço de configuração é uma esfera ou um toro (Exemplo 6.1), um bi-toro (Exemplos 6.1 e 6.4.1) e um tri-toro (Exemplo 6.1). Será possível obter um 4-toro?

Teorema 6.4. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \neq [0, \pi]$ e $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. Então o espaço de configuração é uma esfera, um toro, um bi-toro, um tri-toro ou um par de toros.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \alpha_0]$, para algum $\alpha_0 \neq \pi$. Então $n_2 = 1$ e o genus de cada componente conexa de $[\mathcal{M}]$ é não-negativo mas menor ou igual a 3. Por outro lado, como $0 \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ e $[\mathcal{M}_{\alpha_0}]$ é um ponto, $[\mathcal{M}]$ tem uma componente conexa. Concluimos assim que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera, um toro, um bi-toro ou um tri-toro. E, pelo Exemplo 6.1, sabemos que há pentágonos articulados que produzem cada uma destas alternativas.

Analogamente, se $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \pi]$, para algum $\alpha_1 \neq 0$, concluimos que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera, um toro, um bi-toro ou um tri-toro, e que, sob estas condições, há pentágonos articulados cujos espaços de configuração reproduzem todas estas possibilidades.

Suponhamos agora que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [\alpha_1, \alpha_0]$, para alguns $\alpha_0 \neq \pi$ e $\alpha_1 \neq 0$. Neste caso $[\mathcal{M}]$ é constituído por duas componentes conexas. Qual o genus de cada uma? Como $0 \notin \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, tem-se $|\ell_1 - \ell_2| < \max L$. Suponhamos que $\max L = \ell_3 - (\ell_4 + \ell_5)$ (os outros casos são análogos). Então

$$\ell_1 + \ell_2 > \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 > \ell_3 + \ell_4 - \ell_5, \ell_3 + \ell_5 - \ell_4$$

e

$$\ell_3 + \ell_5 - \ell_4, \ell_3 + \ell_5 - \ell_4 > \max L > \ell_4 + \ell_5 - \ell_3.$$

Há, pois, dois elementos de $-L$ no intervalo $[\max L, \ell_3 + \ell_4 + \ell_5]$, e portanto $\frac{n_1}{2} = 2$. Por outro lado, como $n_2 = 0$, o genus é 1. O espaço de configuração é, pois, constituído por um par de toros. E, no Exemplo 6.4.1, apresentou-se um caso concreto de um pentágono articulado nas condições indicadas. \square

Analisemos agora pentágonos articulados em que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$.

Teorema 6.5. *Seja \mathcal{M} um pentágono articulado tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$ e $[\mathcal{M}]$ não é degenerado. Então o espaço de configuração é um toro, um bi-toro, um tri-toro, um 4-toro ou um par de toros.*

Demonstração. Como $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = [0, \pi]$, temos $n_2 = 2$. Se $n_1 = 0$, então cada componente conexa do espaço de configuração tem genus 1 e, portanto, é um toro. Além disso, tem-se uma das propriedades seguintes:

1. $(>, >)$, para todo o $\alpha \in [0, \pi]$.
2. $(<, <)$, para todo o $\alpha \in [0, \pi]$.
3. $(<, >)$, para todo o $\alpha \in [0, \pi]$.
4. $(>, <)$, para todo o $\alpha \in [0, \pi]$.

Se for válida a condição (1) ou a condição (2), então $[\mathcal{M}_\alpha]$ é uma circunferência, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, e, por isso, $[\mathcal{M}]$ possui uma só componente conexa. Se for válida a condição (3) ou a condição (4), $[\mathcal{M}_\alpha]$ é formado por duas circunferências disjuntas, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ e, portanto, $[\mathcal{M}]$ contém duas componentes conexas. Logo o espaço de configuração de \mathcal{M} é um toro ou um par de toros.

Se $n_1 > 0$, então existe β em $]0, \pi[$ tal que $[\mathcal{M}_\beta]$ é um oito. Por esse motivo, $[\mathcal{M}]$ só tem uma componente conexa. Como n_1 é par e $\frac{n_1}{2} = \#(-L) \leq 3$, concluímos que $2 \leq \frac{n_1}{2} + 1 \leq 4$, logo o espaço de configuração tem genus 2, 3 ou 4. Ou seja, é um bi-toro, um tri-toro ou um 4-toro.

A tabela seguinte indica exemplos de mecanismos para construir cada um destes espaços.

$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$	Espaço de configuração
4, 5, 11, 12, 13	dois toros disjuntos
20, 5, 11, 12, 13	toro
18, 5, 11, 12, 13	bi-toro
16, 5, 11, 12, 13	tri-toro
14, 5, 11, 12, 13	4-toro

□

Em geral, a passagem de um toro para um par de toros pode ser feita de uma forma análoga à apresentada no Exemplo 6.4.1: partindo de um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]$ seja um bi-toro que satisfaz as condições da Figura 59,

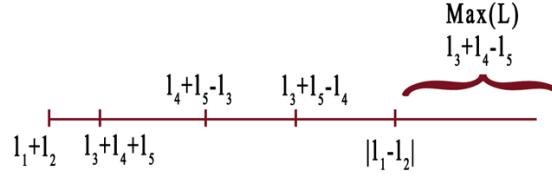


Figura 59:

altera-se o comprimento de uma haste por forma a que $|\ell_1 - \ell_2| = \max L$, como ilustra a Figura 60.

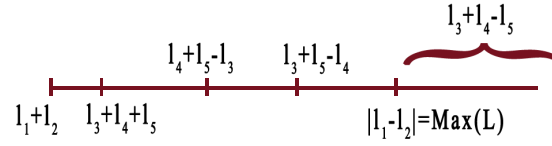


Figura 60:

Deste modo, obtemos dois toros com um ponto em comum (Figura 57). Depois, alterando o valor de ℓ_1 para que se obtenha a ordem entre os comprimentos da Figura 61,

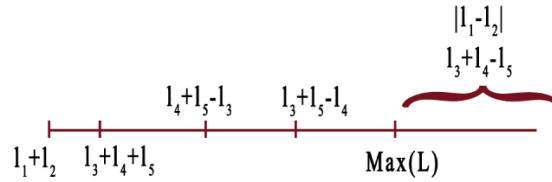


Figura 61:

chega-se a um par de toros (Figura 58).

Contudo, estas não são as únicas transições possíveis entre os diferentes tipos de espaços de configuração. Por exemplo, partindo novamente de um mecanismo \mathcal{M} nas condições descritas e tal que $[\mathcal{M}]$ é uma esfera (como o primeiro cenário apresentado no Exemplo 6.1, reproduzido na Figura 62),

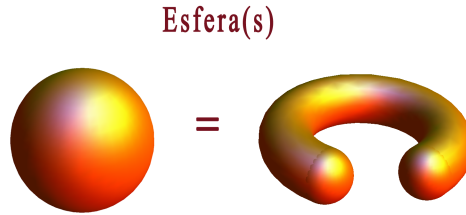


Figura 62: $[\mathcal{M}]$ é homeomorfo a uma esfera.

se alterarmos o comprimento de uma haste por forma a que

$$\ell_1 + \ell_2 = \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$$

e as restantes desigualdades se mantenham, encontramos uma esfera com dois pontos identificados, o objecto da Figura 63:

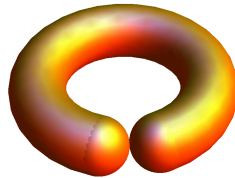


Figura 63: $[\mathcal{M}]$ é uma esfera com dois pontos identificados.

E, se $\ell_1 + \ell_2 < \ell_3 + \ell_4 + \ell_5$, passamos da esfera a um toro (Figura 64):

7 Genus superior a 4

Sabemos já que, se pretendermos obter um espaço de configuração com genus superior a 4, não basta um pentágono articulado \mathcal{M} , ainda que $[\mathcal{M}]$ não seja degenerado. Uma possibilidade seria acrescentar uma haste unida a um novo ponto fixo, como indica a Figura 65.

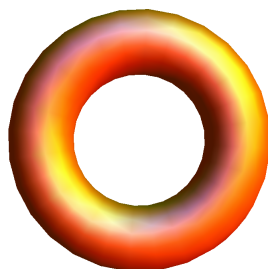


Figura 64: $[\mathcal{M}]$ é um toro.

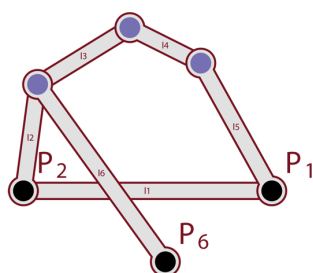


Figura 65: Pentágono com mais uma haste unida a um novo ponto fixo.

Porém, o mero acréscimo de um ponto fixo e de uma haste a ele ligada não conduz a um espaço de configuração mais rico (aliás, em geral, acontece o oposto). Mas, se acrescentarmos um ponto móvel, obtemos um espaço de configuração muito mais vasto do que o inicial: na verdade, até vasto de mais, pois o espaço de configuração é agora parametrizável por 4 variáveis livres. Uma maneira de reduzirmos a liberdade excessiva neste último cenário consiste em unir à haste adicionada uma outra haste ligada a um novo ponto fixo, como ilustra a Figura 66.

7.1 Pentágonos articulados aumentados

O objectivo desta secção é o de estabelecer um processo indutivo que construa mecanismos cujos espaços de configuração tenham genus previamente fixado e arbitrariamente grande.

Definição 7.1. *Um **pentágono articulado aumentado** é um mecanismo $\widehat{\mathcal{M}}$ que se obtém de um pentágono articulado \mathcal{M} acrescentando-lhe n pontos fixos, n pontos móveis e n pares de hastes do seguinte modo:*

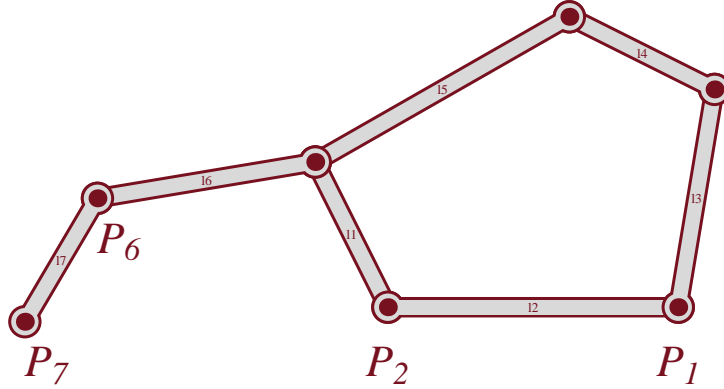


Figura 66: Pentágono com mais duas hastes e um novo ponto fixo.

- O primeiro par de hastes une um novo ponto móvel, digamos \mathcal{V}_6 , a um ponto móvel já existente, \mathcal{V}_3 , e a um novo ponto fixo, digamos \mathcal{V}_7 .
- O segundo par de hastes une um outro novo ponto móvel, digamos \mathcal{V}_8 , a \mathcal{V}_6 e a um novo ponto fixo, digamos \mathcal{V}_9 ,
- Etc.

A Figura 67 mostra uma realização de um pentágono articulado aumentado, para $n = 2$.

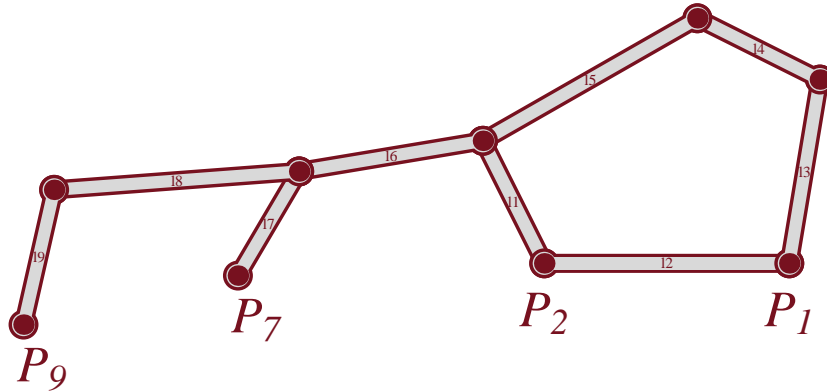


Figura 67: Pentágono articulado aumentado.

Uma vez que um pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ contém de facto apenas um pentágono articulado, manteremos a notação anterior (ou seja,

$\mathcal{M}_\alpha, d_{\mathcal{M}}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}}, \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, etc) tendo em atenção que se referem ao sub-mecanismo \mathcal{M} de $\widehat{\mathcal{M}}$ formado pelo pentágono articulado.

Recorde-se que, no caso dos quadriláteros e dos pentágonos articulados, só existem dois pontos fixos e conhecemos a distância entre eles porque, por definição, estão unidos por uma haste (de comprimento ℓ_1). Por esse motivo, é indiferente qual o par de pontos que escolhemos em \mathbb{R}^2 para "fixar" o mecanismo: escolhido outro par de pontos fixos, digamos P_3 e P_4 , que distem entre si ℓ_1 , existe uma isometria que leva $[P_1P_2]$ em $[P_3P_4]$ e associa a cada realização de \mathcal{M} com pontos fixos P_1 e P_2 uma realização de \mathcal{M} com pontos fixos P_3 e P_4 ; e, portanto, os espaços de configuração $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2)}$ e $[\mathcal{M}]_{(P_3, P_4)}$ são homomorfos.

Como vimos na Secção 2.1, dados $\ell_1 > 0$ e dois pontos P_1 e P_2 , a qualquer terno de pontos (P_1, P_2, P_7) com $\|P_1 - P_2\| = \ell_1$ está associado um espaço de configuração $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ (Definição 3.1). Contudo, o terceiro ponto fixo, P_7 , não está unido aos restantes pontos fixos P_1 e P_2 . Isso faz com que o possamos escolher por forma a ficar a uma distância de P_1 e P_2 tal que o espaço de configuração associado a P_1, P_2, P_7 seja apenas um ponto, ou o possamos escolher por forma a duplicar o espaço de configuração do pentágono articulado que deu origem ao pentágono articulado aumentado. Ou seja, para diferentes escolhas de P_7 , os espaços de configuração podem não ser homomorfos entre si.

7.2 Construção

No que se segue, partiremos de um pentágono articulado cujo espaço de configuração é um toro e acrescentaremos duas hastes, um ponto fixo e um ponto móvel; desse modo, conseguiremos aumentar em 1 o genus do espaço de configuração. Depois prosseguiremos por indução. A Figura 68 esquematiza este processo indutivo e exhibe uma realização de um mecanismo cujo espaço de configuração tem genus g .

Teorema 7.1. *Para cada $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe um pentágono articulado aumentado cujo espaço de configuração tem genus g .*

Na Secção 6, vimos que, se $0 \leq g \leq 4$, basta usar um pentágono articulado com 2 pontos fixos, 3 pontos móveis e 5 hastes apropriadamente escolhidas para obter como espaço de configuração uma esfera ($g = 0$), um toro ($g = 1$), um bi-toro ($g = 2$), um tri-toro ($g = 3$) ou um 4-toro ($g = 4$). Provaremos de



Figura 68: Esquema da indução até g .

seguida que, dado $g \in \mathbb{N}$, $g > 4$, existe um pentágono articulado aumentado com

- $\frac{g+4}{2}$ pontos fixos, $\frac{g+6}{2}$ pontos móveis e $g+5$ hastes, se $g > 4$ e g é par,
- $\frac{g+5}{2}$ pontos fixos, $\frac{g+7}{2}$ pontos móveis e $g+6$ hastes, se $g > 4$ e g é ímpar,

cujo espaço de configuração tem genus g .

Demonstração. Regressemos ao caso $g = 1$ para iniciar o procedimento que, por indução, construirá um pentágono aumentado cujo espaço de configuração tem genus superior a quatro. Consideremos um pentágono articulado \mathcal{M} tal que $[\mathcal{M}]_{(P_1, P_2)}$ é um toro com $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. Suponhamos, por exemplo, que as medidas das hastes em \mathcal{M} são 9, 3, 1, 5, 3. Construiremos um pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ adicionando a \mathcal{M} um novo ponto fixo e duas novas hastes de comprimentos ℓ_6 e ℓ_7 . Recorde-se que, se P_1, P_2, P_7 são pontos do plano tais que $\|P_2 - P_1\| = \ell_1$, então

$$[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [\widehat{\mathcal{M}}_{\alpha}]_{(P_1, P_2, P_7)}.$$

Seja $\alpha' \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ tal que $[\mathcal{M}_{\alpha'}]$ é um oito. Suponhamos que escolhemos o novo ponto P_7 de modo que as duas novas hastes fiquem (esticadas) na mesma direcção quando $P_3 = C_{\delta}$, para algum δ com $\alpha' < \delta < \alpha_0$ e apenas nessas circunstâncias, como indica a Figura 69.

Suponhamos ainda que P_7 pertence à semi-recta $\dot{C}_{\delta}C_{-\alpha_0}$. Desse modo, P_6 é C_{β}^* , para algum $\beta \in [-\pi, \pi]$, onde C_{β}^* é o ponto da circunferência de centro P_7 e raio ℓ_7 tal que $\overrightarrow{P_7C_{\beta}^*}$ faz um ângulo de valor β com $\overrightarrow{P_7C_{\delta}}$ (Figura 70).

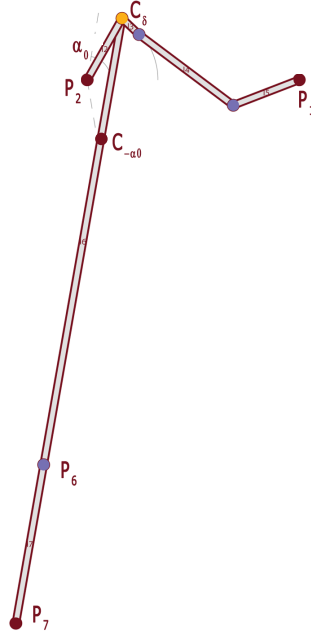


Figura 69: Posição do mecanismo com as duas novas hastes esticadas.

Por fim, suponhamos que, por construção das novas hastes, se tem:

- o valor máximo que β pode tomar, que designamos por β_0 , é menor que $\frac{\pi}{2}$ e é obtido quando $P_3 = C_{-\alpha_0}$;
- o valor mínimo que β pode tomar é $-\beta_0$ e é também obtido quando $P_3 = C_{-\alpha_0}$;
- o ângulo $\angle P_7 C_{\beta_0}^* C_{-\alpha_0} = \angle P_7 C_{-\beta_0}^* C_{-\alpha_0} = \frac{\pi}{2}$.

Então, analisando $[\widehat{\mathcal{M}}_\alpha]_{(P_1, P_2, P_7)}$, para todo o $\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$, concluímos que:

Condição sobre α	Relações	$[\widehat{\mathcal{M}}_\alpha]_{(P_1, P_2, P_7)}$
$\alpha = -\alpha_0$	$(>, >)$	Dois pontos
$-\alpha_0 < \alpha < -\alpha'$	$(>, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = -\alpha'$	$(>, =)$	Dois oitos
$-\alpha' < \alpha < \alpha'$	$(>, <)$	Dois pares de circunferências disjuntas
$\alpha = \alpha'$	$(>, =)$	Dois oitos
$\alpha' < \alpha < \delta$	$(>, >)$	Duas circunferências disjuntas
$\alpha = \delta$	$(>, >)$	Uma circunferência

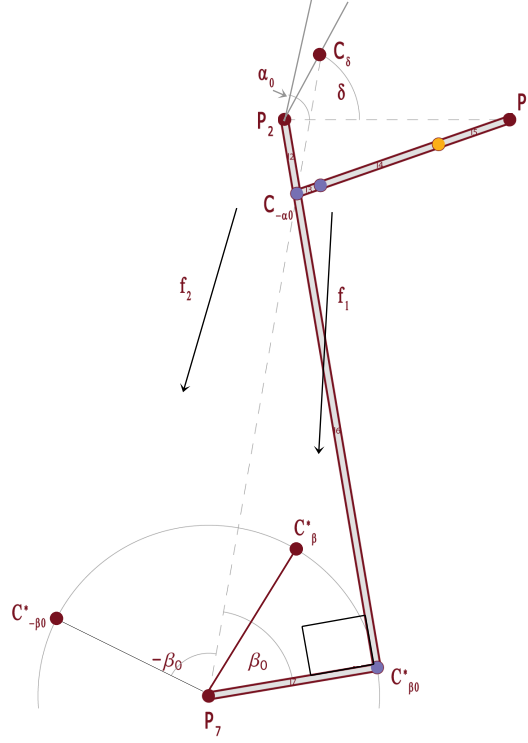


Figura 70: Ligação entre P_6 , P_7 e C_δ .

A Figura 71 mostra este espaço de configuração.

Repare-se que $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)} = \widehat{\mathcal{M}}_1 \cup \widehat{\mathcal{M}}_2$, onde

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \bigcup_{\alpha \in [-\alpha_0, \delta]} [\widehat{\mathcal{M}}_\alpha] = \widehat{\mathcal{M}}_2.$$

Como $\widehat{\mathcal{M}}_1$ e $\widehat{\mathcal{M}}_2$ possuem o mesmo número de oitos que $[\mathcal{M}] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [M_\alpha]$

e a *curva de colagem*

$$[\widehat{\mathcal{M}}_\delta]_{(P_1, P_2, P_7)}$$

de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ com $\widehat{\mathcal{M}}_2$ é uma circunferência (veja a tabela anterior), então a reunião de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ e $\widehat{\mathcal{M}}_2$ duplica o número de oitos existente em $[\mathcal{M}]$ e, portanto, $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ tem uma componente conexa e é um **bi-toro**.

Em resumo, o processo que descrevemos consiste em adicionar um ponto fixo e um par de hastes a um pentágono articulado previamente fixado de

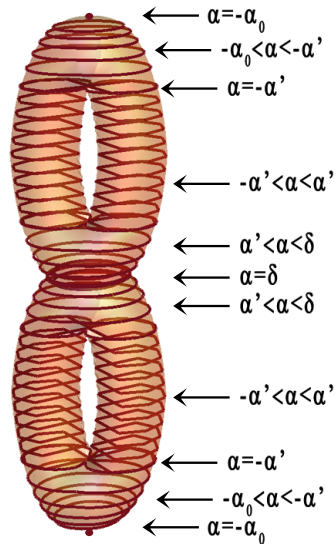


Figura 71: Bi-toro obtido com um pentágono aumentado.

modo a *cortar* o seu espaço de configuração por uma circunferência, depois duplicar a parte *cortada* e finalmente unir as duas partes, a original cortada e a sua cópia, pela circunferência. Assim, partindo de um toro, construímos um bi-toro.

Lema 7.2. *A construção anterior é possível.*

Demonstração. Observemos a Figura 72.

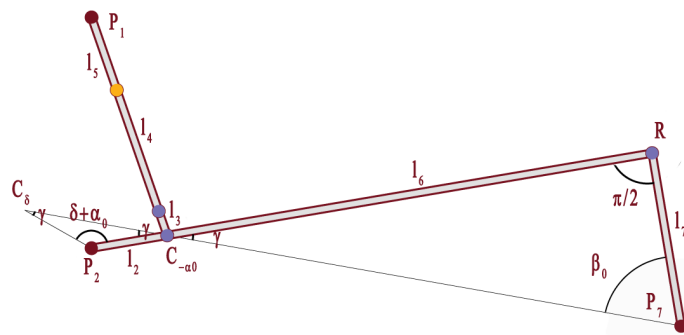


Figura 72: $\beta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Temos

$$\begin{aligned}\overline{P_7 C_{-\alpha_0}} &= \overline{P_7 C_\delta - C_\delta C_{-\alpha_0}} \\ &= \ell_6 + \ell_7 - \overline{C_\delta C_{-\alpha_0}} \\ &= \ell_6 + \ell_7 - 2\ell_2 \cos(\gamma)\end{aligned}$$

onde $\gamma = \frac{\pi - (\delta + \alpha_0)}{2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\ell_6 &= \overline{P_7 C_{-\alpha_0}} \cos(\gamma) \\ \ell_7 &= \overline{P_7 C_{-\alpha_0}} \sin(\gamma),\end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\overline{P_7 C_{-\alpha_0}} = \overline{P_7 C_{-\alpha_0}} \cos(\gamma) + \overline{P_7 C_{-\alpha_0}} \sin(\gamma) - 2\ell_2 \cos(\gamma)$$

isto é,

$$\overline{P_7 C_{-\alpha_0}} = \frac{2\ell_2 \cos(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1}.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned}\ell_6 &= \frac{2\ell_2 \cos^2(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1} \\ \ell_7 &= \ell_2 (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) + 1).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\beta_0 = \pi - \frac{\pi}{2} - \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

□

Nota 7.1. *Consideremos as correspondências*

- $f_1: [-\alpha_0, \delta] \rightarrow [0, \beta_0]$, que a cada $\alpha \in [-\alpha_0, \delta]$ associa o valor em $[0, \beta_0]$ tal que $C_{f_1(\alpha)}^*$ pertence à circunferência de centro C_α e raio ℓ_6 e a concavidade entre $\overrightarrow{C_{f_1(\alpha)}^* P_7}$ e $\overrightarrow{C_{f_1(\alpha)}^* C_\alpha}$ é positiva ou nula;
- $f_2: [-\alpha_0, \delta] \rightarrow [-\beta_0, 0]$, que a cada $\alpha \in [-\alpha_0, \delta]$ associa o elemento de $[-\beta_0, 0]$ tal que $C_{f_2(\alpha)}^*$ pertence à circunferência de centro C_α e raio ℓ_6 e a concavidade entre $\overrightarrow{C_{f_2(\alpha)}^* P_7}$ e $\overrightarrow{C_{f_2(\alpha)}^* C_\alpha}$ é negativa ou nula.

Em [5] pode ler-se uma prova de que f_1 e f_2 são funções e de que são estritamente monótonas (respectivamente, decrescente e crescente). Por isso, em vez de analisarmos $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ em função do ângulo α em $[-\alpha_0, \delta]$, podemos transferir o estudo para a variável β no intervalo $[-\beta_0, \beta_0]$. Desse modo,

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \bigcup_{\beta \in [0, \beta_0]} [\widehat{\mathcal{M}}_{f_1^{-1}(\beta)}]$$

e

$$\widehat{\mathcal{M}}_2 = \bigcup_{\beta \in [-\beta_0, 0]} [\widehat{\mathcal{M}}_{f_2^{-1}(\beta)}].$$

O método anterior pode ser generalizado para se obter um espaço de configuração com uma componente conexa de genus $g = 3$. Vejamos como. Regressemos ao pentágono articulado aumentado anterior e consideremos a função

$$g : [-\beta_0, \beta_0] \rightarrow [-\alpha_0, \delta]$$

tal que

$$\begin{aligned} g|_{[0, \beta_0]} &\equiv f_1^{-1} \\ g|_{[-\beta_0, 0]} &\equiv f_2^{-1}. \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon \in]0, \beta_0[$ tal que $\bigcup_{\beta \in [-\beta_0, \varepsilon]} [\widehat{\mathcal{M}}_{g(\beta)}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ contém três oitos. Acrescentemos um ponto fixo P_9 e duas hastes, de comprimentos ℓ_8 e ℓ_9 , nas condições indicadas no Lema 7.2: em particular, pretendemos que fiquem completamente esticadas quando (e só quando) $\beta = \varepsilon$ e que formem um triângulo rectângulo quando $\beta = -\beta_0$. Tal é possível, bastando tomar

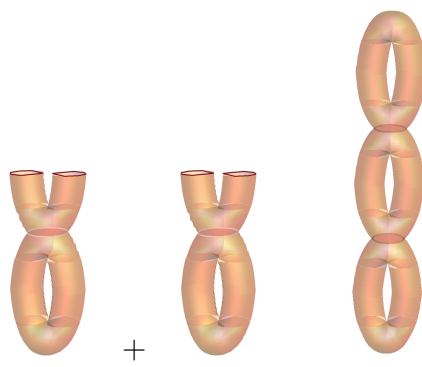
$$\ell_8 = \frac{2 \ell_7 \cos^2(\gamma)}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma) - 1}$$

$$\ell_9 = \ell_7 (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) + 1)$$

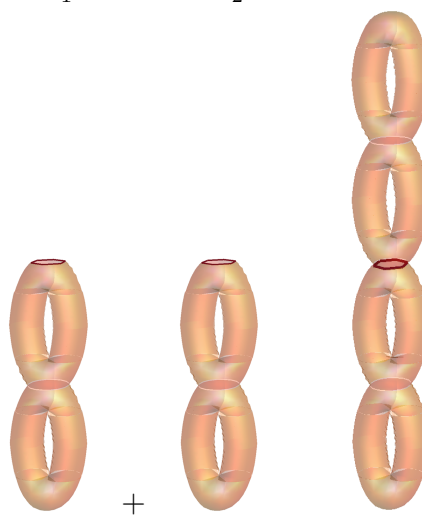
$$\gamma = \frac{\pi - (\varepsilon + \beta_0)}{2}$$

$$P_9 = \text{o ponto da semi-recta } \dot{C}_\varepsilon^* C_{-\beta_0}^* \text{ tal que } \|C_\varepsilon^* - P_9\| = \ell_8 + \ell_9.$$

Esquemáticamente, temos:

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 + \widehat{\mathcal{M}}_2 = \widehat{\mathcal{M}}$$


Em resumo, o processo consiste em adicionar um ponto fixo e um par de hastes ao pentágono articulado aumentado obtido para o caso $g = 2$ de modo a *cortar* o seu espaço de configuração por um par de circunferências disjuntas, depois duplicar a parte *cortada* e finalmente unir as duas partes pelo par de circunferências referido. Desse modo, construímos um novo pentágono articulado aumentado $\widehat{\mathcal{M}}$ tal que $[\widehat{\mathcal{M}}]_{(P_1, P_2, P_7, P_9)}$ é um **tri-toro** (sendo $n_1 = 1$ e $n_2 = 6$). É também claro que, se se tivesse escolhido ε por forma a que $\bigcup_{\beta \in [-\beta_0, \epsilon]} [\widehat{\mathcal{M}}_{g(\beta)}]_{(P_1, P_2, P_7)}$ contivesse quatro oitos, o espaço final seria um **4-toro**.

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 + \widehat{\mathcal{M}}_2 = \widehat{\mathcal{M}}$$


Repetindo o procedimento a partir dos últimos mecanismos obtidos construiríamos, respectivamente, um **5-toro** e um **6-toro**. Por indução, podemos iterar este método e produzir espaços de configuração com uma componente conexa e genus arbitrariamente grande. Mais concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, os mecanismos aqui construídos, associados a pentágonos articulados aumentados com $n + 3$ pontos fixos, $n + 4$ pontos móveis e $2n + 7$ hastes, permitem a construção de espaços de configuração não degenerados com genus $g = 2n + 1$ e $g = 2n + 2$. \square

8 Comentários

O leitor poderá verificar que espaços de configuração obteria se aplicasse o procedimento da secção anterior a quadriláteros, construindo quadriláteros articulados aumentados.

Não se analisou neste texto se os mecanismos apresentados cumprem a função de construir espaços de configuração de genus g com esforço mínimo (em número de pontos e hastes). Além disso, convirá notar que, na maioria dos genus, o processo de construção explicitado não permite fabricar modelos físicos, que possam ser manipuláveis, porque as hastes apropriadas têm comprimentos demasiado grandes.

A lista de superfícies que obtivemos como espaços de configuração de mecanismos é de facto a família completa das superfícies orientáveis. Essa família foi descrita em inúmeras provas, de índole topológica, geométrica ou combinatória, do Teorema de Classificação das Superfícies, sendo uma das mais elementares a de J. Conway, que pode ler-se em [3].

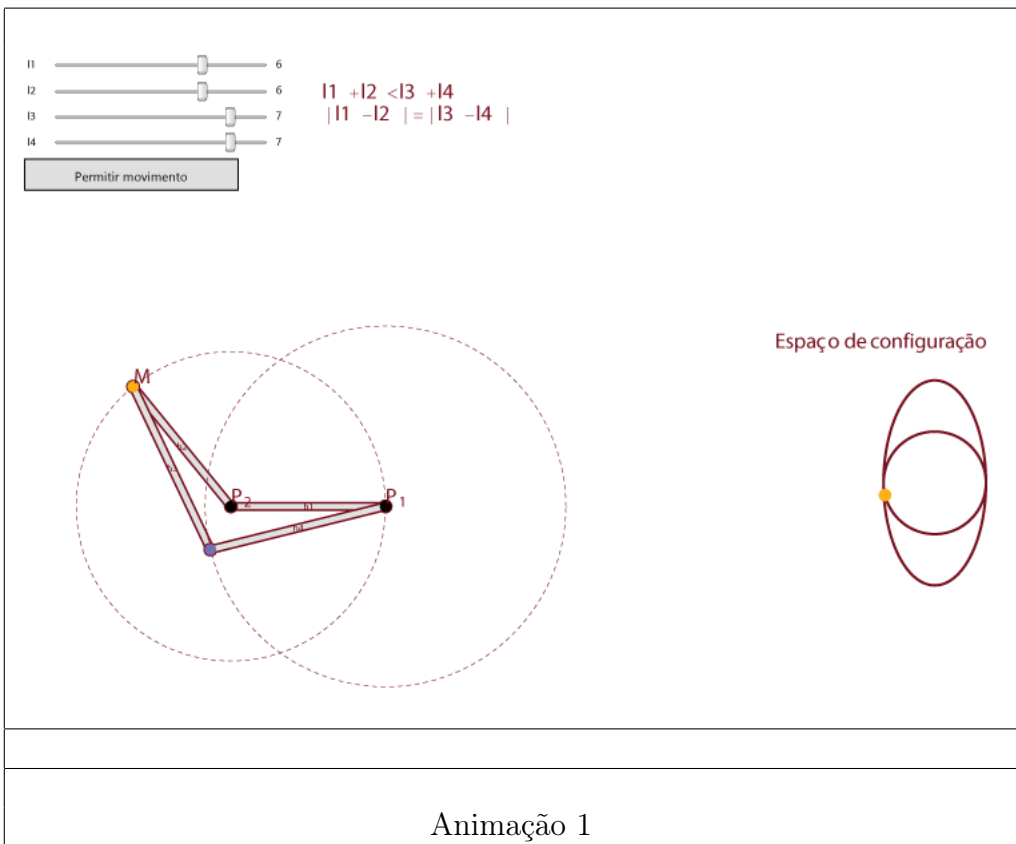
Um dos argumentos clássicos mais conhecidos para classificar as superfícies ([1, 7]) começa com uma esfera e justifica um procedimento que permite costurar ansas (isto é, cilindros) a uma esfera a que se retiraram (um número finito par de) círculos disjuntos. Com os mecanismos, o processo inicia-se num toro e indica como unir toros sucessivos, de que se excluam dois ou quatro círculos devidamente posicionados, para obter os n -toros.

Seria interessante, e uma motivação adicional para o estudo dos mecanismos e respectivos espaços de configuração, obter demonstrações, elementares ou de carácter particularmente ajustado à divulgação, de propriedades de superfícies (como o Teorema da Esfera Cabeluda, o Teorema da Curva de

Jordan, o Teorema de Euler para Poliedros, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer), reformuladas na linguagem dos mecanismos. Além disso, parte do que aqui se analisou é susceptível de generalização a variedades de dimensão superior. Por exemplo, é fácil descrever um mecanismo que construa um toro de dimensão 3 como o produto de três circunferências, $S^1 \times S^1 \times S^1$. O processo de empilhar camadas que utilizámos, para obter as superfícies a partir de curvas, sugere que se investigue a viabilidade de um método geral que, empilhando superfícies ou apelando a fibrações como a de Hopf ([11]), permita obter outras variedades de dimensão 3 como espaço de configuração de algum mecanismo. Mas estes são problemas em aberto em que a autora deste texto não trabalhou.

9 Programação

As (mais de noventa) animações do módulo interactivo foram produzidas com o programa *Mathematica* (<http://www.wolfram.com/>). Apesar das suas múltiplas funcionalidades, este não é um programa de geometria dinâmica, como são, por exemplo, o *Geogebra* (<http://www.geogebra.org/>) ou o *Cinderella* (<http://www.cinderella.de/tiki-index.php>), que teriam servido, com poupança de esforço, para a mera construção dos mecanismos. Qual a vantagem da nossa opção? As limitações do *Mathematica* obrigaram-nos a construir, de raiz, rotinas que reproduzissem o movimento de um mecanismo no plano, atentas a todas as restrições inerentes à sua definição e à necessidade de sincronizar as escolhas do utilizador com a configuração visível do mecanismo. Não obstante o esforço envolvido na concepção de tais ferramentas, inexistentes no programa original, a utilização do *Mathematica* revelou-se crucial ao permitir, em particular, que criássemos modelos de superfícies (com parametrizações que traduzissem o movimento do mecanismo, também ausentes do pacote original de *software* do *Mathematica*) assim como o uso de procedimentos matemáticos ligados à Geometria Analítica e ao Cálculo. A título ilustrativo, seleccionámos duas das animações mais relevantes, de que transcrevemos as suas rotinas comentando-as sumariamente.



Descrição

(* As funções F e FF são utilizadas no desenho da curva a castanho no espaço de configuração e a Txt na escrita de texto,
Comp é uma função auxiliar,
IntPt2 determina o ponto de intersecção de duas haste para uma dada concavidade,
AngMax determina o ângulo interno de um triângulo dado o comprimento dos lados,
MdInt é a função afim que leva [a,b] em [c,d],
cmpFix tem como fim obrigar os pontos móveis a movimentarem-se em arcos de circunferência,
AngOri determina o ângulo entre dois vectores e a função HastesAuxi é utilizada no desenho das hastes,
CrErro corrige erros que possam subsistir no movimento dos pontos móveis e a função TstDst permite a selecção de um ponto móvel, quando o rato se aproxima do ponto *)

```
F[t_, sgn_] := If[sgn >= 0, {Cos[t], Sin[t]}, {Cos[t], 2 Sin[t]}];
FF[t_, r_, c_] := r {Cos[t], Sin[t]} + {c, 0}; St[l_] := Style[l, Castanho, 20];
Txt[l_, Pt_] := Text[Style[l, Castanho, Italic, 20], Pt + {0.4, 0.4}];
CompAuxi[x_, lis_] := Module[{lis2}, lis2 = Drop[lis, {x}]; lis[[x]] <= Plus @@ lis2;
Comp[lis_] := And @@ (CompAuxi[#, lis] & /@ Range[4]);
Cis[t_] := {Cos@t, Sin@t}; Int[Q1_, Q2_, r1_, r2_] := (({xx, yy}) /.
(Solve[{Norm[Q1 - {xx, yy}]^2 == r1^2, Norm[Q2 - {xx, yy}]^2 == r2^2}, {xx, yy}])) // N;
IntPt2[Q1_, Q2_, r1_, r2_, sgn_] := Module[{lis, lis2, lis3},
lis2 := (Int[Q1, Q2, r1, r2]); lis := Sign /@ (Det[{# - Q1, # - Q2}] &) /@ lis2;
lis3 = lis2[(Flatten[Position[lis, sgn]])[[1]]];
If[Norm[Q1 - Q2] == r1 + r2, Q1 + r1 Normalize[Q2 - Q1], lis3]] // N;
AngMax[d1_, d2_, d3_, d4_] := ArcCos[(d1^2 + d2^2 - (d3 + d4)^2) / (2 d1 d2)] // N;
MdInt[x_, a_, b_, c_, d_] := ((c - d) / (a - b)) (x - b) + d;
cmpFix[x_, y_, dis_] := y + (x - y) dis / Norm[(x - y)];
SgnVt[v_, u_] := Sign[Det[{v, u}]]; AngOri[u_, v_] := -SgnVt[v, u] VectorAngle[u, v];
Haste2[{Pt1_, Pt2_}, txt_, k_: 0.1, eps_: 4 / 3, eps2_: 4] := Module[{v, u, lis2}, v = Pt2 - Pt1;
u = Normalize[{-Last[v], First[v]}];
lis2 = {Pt1 + ku, Pt2 + ku, Pt2 - ku, Pt1 - ku};
{Castanho, AbsoluteThickness[eps2], Circle[Pt1, Sqrt[2] eps k], Circle[Pt2, Sqrt[2] eps k],
Line@Join[lis2, {Pt1 + ku}], LightGray, Disk[Pt1, Sqrt[2] eps k],
Disk[Pt2, Sqrt[2] eps k], Polygon@lis2, Castanho, Text[txt, (Pt1 + Pt2) / 2]};
HastesAuxi[lis_] :=
Flatten[Haste2[#, "h" <> ToString[First[First[Position[lis, #]]]]] & /@ lis];
CrErro[P_, Q_, T_, r1_, r2_, k_] :=
If[Norm[P - Q] >= r1 + r2 - 10^(-15) || Max[r1, r2] >= Min[r1, r2] + Norm[P - Q] - 10^(-15), n = k;
T, If[TstDst[T], Q, T]]; TstDst[v_] := Norm[MousePosition["Graphics"] - v] < erDst;
```

Descrição
<p>(* Valores iniciais de algumas variáveis *)</p> <pre> P2 = Module[{x, ang, ang2}, x = (Max[Abs[11 - 12], Abs[13 - 14]] + Min[11 + 12, 13 + 14]) / 2; ang = AngMax[14, x, 13, 0]; ang2 = ang + AngMax[11, x, 12, 0]; 11 Cis@ang2]; P3 = Int[P2, P4, 12, 13][[1]]; PP2 = P2; PP3 = P3; φ0 := AngMax[11, 14, 12, 13]; φ1 := AngMax[14, 13, 11, 12]; ImS := 700; PlRg := {{-max11, max11 + 2 max12 - 3}, {-Max[max11, max12], max11 + 3}}; </pre>
<p>(* Parte interactiva do programa *)</p> <pre> Manipulate[Column[{ Row[{ Column[{ </pre>
<p>(* Sliders relativos às variáveis 11, 12, 13, 14 *)</p> <pre> Row[{"11 ", Dynamic[Slider[Dynamic[14], {1, 8}, Enabled → ! var, Appearance → "Labeled"]]}], Row[{"12 ", Dynamic[Slider[Dynamic[11], {1, max11}, Enabled → ! var, Appearance → "Labeled"]]}], Row[{"13 ", Dynamic[Slider[Dynamic[12], {1, max12}, Enabled → ! var, Appearance → "Labeled"]]}], Row[{"14 ", Dynamic[Slider[Dynamic[13], {1, 8}, Enabled → ! var, Appearance → "Labeled"]]}] }], 112 = 14 + 11; 134 = 12 + 13; 121 = Abs[14 - 11]; 143 = Abs[12 - 13]; Column[{Row[{St["11+12"], Which[112 > 134, St[>"], 112 < 134, St[<"], True, St["="]}, St["13+14"]}], Row[{St[" 11-12 "], Which[121 > 143, St[>"], 121 < 143, St[<"], True, St["="]}, St[" 13-14 "]}]] }], </pre>

Descrição

(* Botão para mudar o comprimento das hastes *)

```
Button[Dynamic[If[var, "Mudar comprimentos de hastes", "Permitir movimento"]],
  If[Comp[{l1, l2, l3, l4}], var = !var], ImageSize -> 200],
Text[Style[Dynamic[If[Comp[{l1, l2, l3, l4}], txt = "",
  txt = "Os valores introduzidos não permitem a ocorrência de um mecanismo!
  Por favor, altere os valores."]], Black, Bold, 18]],
```

(* Actualização de variáveis*)

```
Dynamic[P2L = P1 - {l1, 0}; P22L = P1 + {l1, 0}; P3L = P4 + {l3, 0}; P33L = P4 - {l3, 0};
var1 = l1 + l4 > l3 + l2; var1bis = l1 + l4 < l3 + l2; var2 = Abs[l1 - l4] < Abs[l3 - l2];
var2bis = Abs[l1 - l4] > Abs[l3 - l2]; var3 = (Norm[PP2 - P4] > 0.1 && Norm[PP3 - P1] > 0.1) ||
(Norm[PP3 - P1] < 0.1 && Norm[PP2 - P2L] < 0.1) ||
(Norm[PP3 - P1] < 0.1 && Norm[PP2 - P22L] < 0.1) || (Norm[PP2 - P4] < 0.1 &&
Norm[PP3 - P3L] < 0.1) || (Norm[PP2 - P4] < 0.1 && Norm[PP3 - P33L] < 0.1);
If[var1, α1 = ArcCos[(l1^2 + l4^2 - (l3 + l2)^2) / (2 l1 l4)], α1 = Pi];
If[var2, α2 = ArcCos[(l1^2 + l4^2 - (l3 - l2)^2) / (2 l1 l4)], α2 = 0]; If[! var,
P2 = Module[{x, ang, ang2}, x = (Max[Abs[l1 - l2], Abs[l3 - l4]] + Min[l1 + l2, l3 + l4]) / 2;
ang = AngMax[l4, x, l3, 0]; ang2 = ang + AngMax[l1, x, l2, 0]; l1 Cis@ang2];
P3 = Int[P2, P4, l2, l3][[1]]; PP2 = P2; PP3 = P3];
EventHandler[sign1 = SgnVt[P1 - PP2, PP3 - PP2]; sign2 = SgnVt[PP2 - PP3, P4 - PP3];
sign3 = SgnVt[PP3 - PP2, P1 - PP2];
If[! ((l4 == l1 && l2 == l3) || (Abs[l1 - l4] == Abs[l3 - l2]) && l1 + l4 == l3 + l2) || (var3),
Which[TstDst[PP2], n = 1, TstDst[PP3], n = 2, True, n = n]]; Row[{
```

Descrição
<pre>Off[Part::partw]; Off[Part::pspec]; (* Valores iniciais de algumas variáveis e referências para cores *) Roxo := RGBColor[118 / 255, 112 / 255, 179 / 255]; Laranja := RGBColor[252 / 255, 175 / 255, 23 / 255]; Castanho := RGBColor[119 / 255, 17 / 255, 31 / 255]; SzPts := AbsolutePointSize[12]; l1 = 6; l2 := 7; l3 := 7; l4 := 6; P1 := {0, 0}; P4 := {14, 0}; erDst := 1; n = 1; var = False; maxl1 := 8; maxl2 := 8;</pre>

Descrição
<pre>(* Gráfico das hastes *) Graphics[{PointSize[0.015], {Which[n == 1, {PP3 = IntPt2[PP2, P4, l2, l3, sign2]}, n == 2, {PP2 = IntPt2[P1, PP3, l1, l2, sign1]}]}, HastesAuxi@{{P1, P4}, {P1, PP2}, {PP2, PP3}, {PP3, P4}}, Black, Point /@ {P1, P4}, Txt[Subscript["P", 2], P1], Txt[Subscript["P", 1], P4], Castanho, Dashed, Circle[P1, l1], Circle[P4, l3], Roxo, Point /@ Which[n == 1, {PP3}, n == 2, {PP2}], Laranja, Point /@ (PPP = Which[n == 1, {PP2}, n == 2, {PP3}]), Txt["M", First@PPP]}}, ImageSize -> ImS, PlotRange -> PlRg], sign = SgnVt[(PP3 - P4), (PP3 - PP2)];</pre>

Descrição

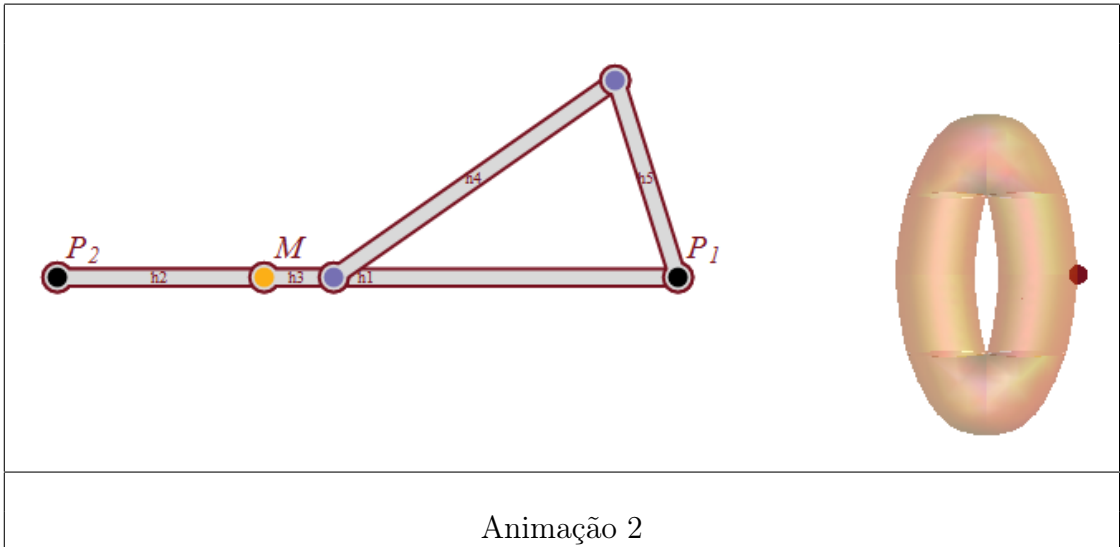
(* Determinação do espaço de configuração a partir dos comprimento das hastes *)

```
Which[
  (var1 && var2) || (var1bis && var2bis), sgn2 = sign;
  ang = MdInt[-AngOri[PP2, {1, 0}],  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , 0, Pi]; PtoF =
    {Cos@ang, sign Sin@ang} + {-2, 0}; PrP[t_] := {Cis@t + {-2, 0}, Cis@t + {2, 0}},
  (var1 && var2bis) || (var1bis && var2), sgn2 = sign;
  If[ $\alpha_1$  == Pi, a2 = Abs@ $\alpha_2$ ; a1 = 2 Pi - Abs@ $\alpha_2$ ; angAuxi = AngOri[PP2, {1, 0}];
    If[angAuxi > 0, angAuxi2 = angAuxi, angAuxi2 = 2 Pi + angAuxi];
    ang = -sign MdInt[angAuxi2, a2, a1, 0, Pi], a2 = Abs@ $\alpha_1$ ; a1 = -Abs@ $\alpha_1$ ; ang = -sign
      MdInt[-AngOri[PP2, {1, 0}], a2, a1, 0, Pi]; PtoF = Cis@ang; PrP[t_] := Cis@t,
  (var1 || var1bis || var2 || var2bis) && (l4  $\neq$  l1 || l2  $\neq$  l3),
  Which[
    l1 + l4 == l3 + l2 && Abs@(l1 - l4) < Abs@(l3 - l2),
    angAuxi = AngOri[PP2, {1, 0}];
    If[angAuxi < 0, angAuxi = 2 Pi + angAuxi]; ang = Abs@MdInt[angAuxi,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , -Pi, 0];
    PtoF = {Sign[Last@PP2] Cos@ang - Sign[Last@PP2], sign Sin@ang};
    PrP[t_] := {Cis@t + {-1, 0}, Cis@t + {1, 0}},
    l1 + l4 == l3 + l2 && Abs@(l1 - l4) > Abs@(l3 - l2),
    ang = AngOri[PP2, {1, 0}] + Pi;
    PtoF = Foito[ang, sign]; PrP[t_] := {Cis@t + {-1, 0}, Cis@t + {1, 0}},
    l1 + l4 < l3 + l2 && Abs@(l1 - l4) == Abs@(l3 - l2),
    ang = AngOri[PP2, {1, 0}];
    PtoF = Foito[ang, sign]; PrP[t_] := {Cis@t + {-1, 0}, Cis@t + {1, 0}},
    True,
    angAuxi = AngOri[PP2, {1, 0}];
    If[angAuxi < 0, angAuxi = 2 Pi + angAuxi]; ang = Abs@MdInt[angAuxi,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1$ , -Pi, 0];
    PtoF = {Sign[Last@PP3] Cos@ang - Sign[Last@PP3], sign Sin@ang};
    PrP[t_] := {Cis@t + {-1, 0}, Cis@t + {1, 0}}
  ]
,
  (l4  $\neq$  l1 || l2  $\neq$  l3),
  ang = -AngOri[(PP2 - P1), {1, 0}];
  PtoF = F[ang, sign2]; PrP[t_] := {F[t, 1], F[t, -1]},
  (l4 == l1 && l2 == l3 && l2  $\neq$  l1),
  ang = -AngOri[(PP3 - P4), {1, 0}];
  PtoF = F[ang, sign3]; PrP[t_] := {F[t, 1], F[t, -1]}
,
  True,
  angPt = -AngOri[(PP2 - P1), {1, 0}]; angPt2 = -AngOri[(PP3 - P4), {1, 0}];
  PtoF = Which[Abs[Last[PP3]] < 0.1 && First[PP3] < l2 - 0.5, FF[angPt, 1, -1],
    Abs[Last[PP2]] < 0.1, FF[angPt2, 1, 1], True, FF[angPt, 2, 0]];
  PrP[t_] := {FF[t, 1, 1], FF[t, 1, -1], FF[t, 2, 0]};

```

(* Desenho do espaço de configuração *)

```
Column[{Text@Style["Espaço de configuração", Castanho, Italic, 20] ,
  Show[ParametricPlot[PrP[t], {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Castanho, Thickness@0.008}],
  Graphics[{SzPts, Laranja, Point@PtoF}], Axes -> False,
  PlotRange -> {{-3, 3}, {-2.3, 2.3}}, ImageSize -> 300]]], "MouseDragged" ->
(Which[n == 1, PP2 = CrErro[P4, cmpFix[MousePosition["Graphics"], P1, l1], PP2,
  l2, l3, 2], n == 2, PP3 = CrErro[P1, cmpFix[MousePosition["Graphics"], P4, l3],
  PP3, l2, l1, 1]])]]], SaveDefinitions -> True]
```



Descrição
<p>(* Valores iniciais de algumas variáveis e referências para cores *)</p> <pre> lDis = {3, 1, 5, 3, 9}; lFix := {3, 3}; lMov := {1, 5}; P1 := {0, 0}; P2 := {lDis[[1]], 0}; P3 = {lDis[[1]] + lDis[[2]], 0}; P5 := {lDis[[5]], 0}; P4 := IntPt2[P3, P5, lDis[[3]], lDis[[4]], -1]; lisFx := {P1, P5}; lisMv = {P2, P4}; v1 := P5 - P1; erroAng := 0.1; erDst := 0.1; erDst2 := 0.4; SzPts := AbsolutePointSize[12]; ImS := 500; lis := {1, 2}; n = 1; kN := 2; Roxo := RGBColor[118 / 255, 112 / 255, 179 / 255]; Laranja := RGBColor[252 / 255, 175 / 255, 23 / 255]; Castanho := RGBColor[119 / 255, 17 / 255, 31 / 255]; </pre>

Descrição
<p>(* As funções F1 e F2 são utilizadas na paramaterização do espaço de configuração e Txt na escrita de texto,</p> <p>IntPt2 determina o ponto de intersecção de duas haste para uma dada concavidade,</p> <p>MdInt é a função afim que leva $[a,b]$ em $[c,d]$,</p> <p>cmpFix tem como fim obrigar os pontos móveis a movimentarem-se em arcos de circunferência,</p> <p>a função Haste2Auxi2 é utilizada no desenho das hastes e AngOri determina o ângulo entre dois vectores,</p> <p>AngMax determina o ângulo interno de um triângulo dado o comprimento dos lados,</p> <p>Ray determina a altura do toro em função do ângulo do ângulo α,</p> <p>Ang transforma $[-\theta_1, \theta_1]$ em $[0, \pi]$, Mov é utilizada na alternância entre os pontos móveis,</p> <p>a função TstDst permite a selecção de um ponto móvel quando o rato se aproxima do ponto,</p> <p>Para obriga um ponto móvel a parar quando se está numa situação iminente de erro,</p> <p>DetCmp1, DetCmp, DetAng previnem o aparecimento de erros enquanto AngMaxP3 determina o ângulo máximo de rotação possível para P3.</p> <p>*)</p>

Descrição

```

F1[x_, r_] := r { Cos[x] ((Abs[Sin[x]] + 10 (1 - r)) ^ (1 / 4), Sin[x], r ^ 2);
F2[x_, r_, sgn_] := { Cos[x] (Abs[Sin[x]] ^ (1 / 4), Sin[x] + sgn (ArcTan[3 r] - ArcTan[3]), r);
Plano = 2; Ref[{x_, y_, z_}] := {x, y, 2 * Plano - z};
Txt[l_, Pt_] := Text[Style[l, Castanho, Italic, 20], Pt + {0.4, 0.4}];
MdInt[x_, {a_, b_}, {c_, d_}] := ((c - d) / (a - b)) (x - b) + d;
Int[Q1_, Q2_, r1_, r2_] :=
  (({xx, yy}) /. (Solve[{Norm[Q1 - {xx, yy}] = r1, Norm[Q2 - {xx, yy}] = r2}, {xx, yy}]]);
IntPt2[Q1_, Q2_, r1_, r2_, sgn_] := Module[{lis, lis2}, lis2 := Int[Q1, Q2, r1, r2];
  lis := Sign /@ (Det[{# - Q1, # - Q2}] &) /@ lis2; lis2[[First[Flatten[Position[lis, sgn]]]]];
cmpFix[x_, y_, dis_] := y + (x - y) dis / Norm[(x - y)];
Haste2[{Pt1_, Pt2_}, txt_, k_ : 0.1, eps_ : 4 / 3, eps2_ : 4] :=
  Module[{v, u, lis2}, v = Pt2 - Pt1;
    u = Normalize[{-Last[v], First[v]}];
    lis2 = {Pt1 + k u, Pt2 + k u, Pt2 - k u, Pt1 - k u};
    {Castanho, AbsoluteThickness[eps2], Circle[Pt1, Sqrt[2] eps k], Circle[Pt2, Sqrt[2] eps k],
      Line@Join[lis2, {Pt1 + k u}], LightGray, Disk[Pt1, Sqrt[2] eps k],
      Disk[Pt2, Sqrt[2] eps k], Polygon@lis2, Castanho, Text[txt, (Pt1 + Pt2) / 2]};
HastesAuxi2[{lis_, txt_}] :=
  Flatten[Haste2[lis, txt]];
SgnVt[v_, u_] := Sign[Det[{v, u}]];
AngOri[u_, v_] := -SgnVt[v, u] VectorAngle[u, v];
AngMax[d1_, d2_, d3_] := ArcCos[(d1^2 + d2^2 - d3^2) / (2 d1 d2)] // N;
Ray[t_, p_ : 0, q_ : 1, r_ : -lisAng[[1]], s_ : -AngMinP2] := MdInt[t, {r, s}, {p, q}];
Ang[θ_, θ1_, i1_ : 0, i2_ : Pi] := MdInt[θ, {-θ1, θ1}, {0, Pi}];
Md[k_] := Mod[k, 2] + 1; Mov[P_, Q_, k_] := If[stop[[k]] || (! TstDst[P]), P, Q];
TstDst[v_] := Norm[MousePosition["Graphics"] - v] < erDst2;
Para[k_] := If[n ≠ k, stop[[n]] = True];
DetAng[u_, v_, α_, k_] := If[VectorAngle[u, v] > α - erroAng, Para[k]; n = k, stop[[n]] = False];
AngMaxP3[k_] := AngMax[lMov[[k]], Norm[lisMv[[k]] - lisFx[[Md[k]]]],
  lMov[[Md[k]]] + lFix[[Md[k]]]]; DetCmpl[dis1_, dis2_, dis3_, k_] :=
  If[dis3 > dis1 + dis2 - erDst, Para[k]; n = k, stop[[n]] = False];
DetCmpl[P_, Q_, dis1_, dis2_, k_] := DetCmpl[dis1, dis2, Norm[P - Q], k];

```

Descrição
<p>(* Valores iniciais de algumas variáveis *)</p> <pre> lVct = {Normalize[P3 - P1], Normalize[P3 - P4]}; lisAng := {AngMax[lDis[[1]], lDis[[5]], lDis[[2]] + lDis[[3]] + lDis[[4]], AngMax[lDis[[4]], lDis[[5]], lDis[[1]] + lDis[[2]] + lDis[[3]]}; AngMinP2 := AngMax[lDis[[1]], lDis[[5]], -lDis[[2]] + lDis[[3]] + lDis[[4]]}; PlRg := Module[{xx, yy}, xx := Abs[lDis[[5]] / 2 - (Plus@@(lDis[[#]] & @Range[4])) / 2]; yy := Min[lDis[[1]] + lDis[[2]], lDis[[3]] + lDis[[4]]]; {{-xx, xx + lDis[[5]]}, {-yy, yy}}}; lisSgn = (SgnVt[lisFx[[#]] - lisMv[[#]], P3 - lisMv[[#]]) & /@ lis; lisSgn2 = (SgnVt[lisMv[[1]] - P3, lisMv[[2]] - P3]); stop = {False, False, False}; </pre> <p>(* Pt determina a posição do ponto na superfície, em função da posição das hastes *)</p> <pre> Pt[a_, b_, c_] := Which[a < -AngMinP2, r = Ray[a]; F1[c Ang[b, 01], r], a < 0, r = Ray[a, 1, 2, -AngMinP2, 0]; F2[c Ang[b, Pi], r, c], a < AngMinP2, r = Ray[-a, 1, 2, -AngMinP2, 0]; Ref[F2[c Ang[b, Pi], r, c]], True, r = Ray[-a]; Ref[F1[c Ang[b, 01], r]]]; </pre> <p>(* Parte interactiva do programa *)</p> <pre> Manipulate[EventHandler[Dynamic[</pre>

Descrição

(* Actualização de variáveis *)

```
SgnP4 = SgnVt[P3 - lisMv[[2]], P5 - lisMv[[2]]];
θ = -AngOri[P3 - lisMv[[1]], P5 - lisMv[[1]]];
φ := -AngOri[lisMv[[1]], v1]; θ1 = AngMaxP3[1];
(DetCmp[P3, lisFx[[#]], lMov[[#]], lFix[[#]], #] &) /@ lis;
(DetCmp[lMov[[#]], Norm[P3 - lisFx[[#]], lFix[[#]], Md[#]] &) /@ lis;
(DetCmp[lMov[[Md[#]], Norm[lisMv[[#]] - lisMv[[Md[#]], lMov[[#]], 2] &) /@ lis;
(DetCmp[lMov[[#]], Norm[P3 - lisFx[[#]], lFix[[#]], #] &) /@ lis;
(DetCmp[P3, lisFx[[#]], lMov[[Md[#]], lMov[[#]] + lFix[[Md[#]], #] &) /@ lis;
If[n ≠ 3, kN = Md[n]; lisSgn[[n]] = - (SgnVt[lisFx[[n]] - lisMv[[n]], P3 - lisMv[[n]]);
lisMv[[kN]] = IntPt2[P3, lisFx[[kN]], lMov[[kN]], lFix[[kN]], lisSgn[[kN]]];
lVct = (Normalize[P3 - lisMv[[#]]] &) /@ lis; P3 = lisMv[[n]] + lMov[[n]] lVct[[n]];
DetAng[(-1)^(n+1) (lisMv[[n]] - lisFx[[n]], v1, lisAng[[n]], kN],
lisMv = (IntPt2[P3, lisFx[[#]], lMov[[#]], lFix[[#]], lisSgn[[#]]] &) /@ lis;
```

(* Muda o ponto móvel seleccionado *)

```
Which[TstDst[lisMv[[1]]], n = 1, TstDst[lisMv[[2]]], n = 2, TstDst[P3], n = 3, True, n = n];
lisTot = {lisMv[[1]], lisMv[[2]], P3}; Row[
```

(* Gráfico do mecanismo *)

```
Graphics[{HastesAuxi2 @ {{P1, P5}, "h1"}, {{P1, lisMv[[1]]}, "h2"},
{{lisMv[[1]], P3}, "h3"}, {{P3, lisMv[[2]]}, "h4"}, {{lisMv[[2]], P5}, "h5"}},
SzPts, If[stop[[n]], Roxo, Laranja], Point /@ {lisTot[[n]]}, Black,
Point /@ {P1, P5}, Txt[Subscript["P", 2], P1], Txt[Subscript["P", 1], P5],
If[n ≠ 3, Txt["M", lisMv[[n]]], Txt["M", P3]], Roxo, Point /@
((lisTot[[#]] &) /@ Delete[Range[3], n]), ImageSize → ImS, PlotRange → PlRg],
```

(* Parte 3D da animação *)

```
Show[list, Graphics3D[{SzPts, Castanho, Point[Pt[φ, θ, SgnP4]]}],
PlotRange → All, Boxed → False, Axes → False, ImageSize → 250,
SphericalRegion → True, ViewPoint → {5, 0, 0}]]],
```

(* Tradução do movimento do rato relativamente ao mecanismo *)

```
"MouseDown" => Which[n ≠ 3, (lisMv[[n]] =
Mov[lisMv[[n]], cmpFix[MousePosition["Graphics"], lisFx[[n]], lFix[[n]], n]),
n == 3, P3 = Mov[P3, MousePosition["Graphics"], n]], SaveDefinitions → True]
```

10 Bibliografia

Nos artigos [6, 9, 2], os autores apresentam uma descrição dos espaços de configuração obtidos com pentágonos articulados ditos genéricos, usando métodos distintos do utilizado neste texto para os identificar ou visualizar (nomeadamente Teoria de Morse, espaços de fibras e a projecção proposta em [8]).

Em [4], pode aprender-se como construir um mecanismo gigantesco cujo espaço de configuração contém uma componente conexa que é o plano projectivo, uma garrafa de Klein ou outra superfície compacta, sem bordo e não orientável. Contudo, ao contrário do caso orientável, não se conhece um mecanismo cujo espaço de configuração tenha apenas uma componente conexa e que seja precisamente uma destas superfícies não-orientáveis.

Referências

- [1] R. Courant, H. Robbins, I. Stewart, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 2ª edição, 1996.
- [2] R. Curtis, M. Steiner, *Configuration Spaces of Planar Pentagons*, American Mathematical Monthly 114 (2007) 183–201.
- [3] G. K. Francis, J. R. Weeks, *Conway's ZIP Proof*, American Mathematical Monthly 106 (1999) 393–399.
- [4] D. Jordan, M. Steiner, *Configuration Spaces of Mechanical Linkages*, Journal of Discrete and Computational Geometry 22 (1999) 297–315.
- [5] D. Jordan, M. Steiner, *Compact Surfaces as Configuration Spaces of Mechanical Linkages*, Israel Journal of Mathematics 122 (2001) 175–187.
- [6] O. Mermoud, M. Steiner, *Visualisation of Configuration Spaces of Polygonal Linkages*, Journal for Geometry and Graphics 4, No. 2 (2000) 147–157.

- [7] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.
- [8] W. P. Thurston, J. R. Weeks, *The mathematics of three-dimensional manifolds*, Scientific American 251 (1984) 94–107.
- [9] D. Shimamoto, C. Vanderwaart, *Spaces of polygons in the plane and Morse theory*, American Mathematical Monthly 112 (2005) 289–310.
- [10] *Simetria - apresentação dinâmica*
<http://www.atractor.pt/publicacoes/conteudoDVD.htm>
- [11] <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/People/Eldar/thesis/>